4. Regulární a inverzní matice

Cv. 4.1 Diskutujte, kdy je trojúhelníková matice regulární.

(Připomeňme, že horní trojúhelníková matice A má libovolné hodnoty na diagonále a nad ní, ale pod diagonálou jsou samé nuly. Formálně: $a_{ij} = 0\ \forall i > j$. Dolní trojúhelníková matice to má naopak.)

Řešení:
Horní trojúhelníková matice je již (skoro) v odstupňovaném tvaru. Pokud jsou diagonální prvky nenulové, pak to jsou pivoty a matice je regulární. Pokud alespoň jeden diagonální prvek je nulový, pak v příslušném sloupci není pivot, a tím pádem je matice singulární.

S dolní trojúhelníkovou maticí je to stejné. To jest, matice je regulární právě tehdy, když jsou všechny prvky na diagonále nenulové. Zdůvodnění je jednoduché – transpozicí matice ji převedeme na horní trojúhelníkovou matici a uvědomíme si, že transpozice zachovává regularitu.

Cv. 4.2 Uvažujme matici v blokovém tvaru

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & a^T \\ b & C \end{pmatrix},$$

kde $\alpha \neq 0$, $b, c \in \mathbb{R}^{n-1}$ a $C \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$. Aplikujte na matici jednu iteraci Gaussovy eliminace a odvoďte rekurentní vzoreček na test regularity.

Řešení:
Od druhého řádkového bloku odečteme $\frac{1}{\alpha}b$-násobek prvního řádku a dostaneme

$$\begin{pmatrix} \alpha & a^T \\ b - \alpha\frac{1}{\alpha}b & C - \frac{1}{\alpha}ba^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & a^T \\ o & C - \frac{1}{\alpha}ba^T \end{pmatrix}.$$

Tím jsme provedli jednu iteraci Gaussovy eliminace. Protože pivot vlevo nahoře je nenulový, můžeme usoudit, že matice A je regulární právě tehdy, když je regulární matice $C - \frac{1}{\alpha}ba^T$. Tím jsme zredukovali test regularity matice řádu n na regularity matice matice řádu $n-1$.

Cv. 4.3 Najděte inverzní matici k matici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 10 \end{pmatrix}.$$

Řešení:
Elementárními řádkovými úpravami převedeme $(A \mid I_3)$ na redukovaný odstup-

ňovaný tvar:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 10 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 10 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -0.5 & -0.5 & 0.5 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2.5 & 2.5 & -0.5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -0.5 & -0.5 & 0.5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2.5 & 2.5 & -0.5 \\ 0 & 1 & 0 & 2.5 & -0.5 & -0.5 \\ 0 & 0 & 1 & -0.5 & -0.5 & 0.5 \end{array}\right).$$

Máme tedy $A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -5 & 5 & -1 \\ 5 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Cv. 4.4 Invertujte matice elementárních řádkových úprav.

Připomeňme, že elementární operace a příslušné matice jsou:

(a) Vynásobení i-tého řádku číslem $\alpha \neq 0$ lze reprezentovat vynásobením zleva maticí

$$E_i(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \alpha & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Přičtení α-násobku j-tého řádku k i-tému, přičemž $i \neq j$, lze reprezentovat vynásobením zleva maticí

$$E_{ij}(\alpha) = \begin{array}{c} \\ \\ \\ i \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & \ddots & \vdots \\ & \alpha & & \ddots & 0 \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccccc} & j & & & \end{array} \end{array}.$$

(c) Výměna i-tého a j-tého řádku jde reprezentovat vynásobením zleva maticí

$$E_{ij} = \begin{array}{c|cc|} & i & j \\ \hline i & 0 & 1 \\ j & 1 & 0 \end{array}$$

$$E_{ij} = \begin{array}{cc} \begin{array}{c} i \\ \\ j \end{array} & \begin{pmatrix} & & & \\ & 0 & 1 & \\ & & & \\ & 1 & 0 & \\ & & & \end{pmatrix} \\ & \begin{array}{cc} i & j \end{array} \end{array}.$$

Řešení:
Ukážeme dva postupy.

1) První způsob je podle kuchařky na invertování matic. První matici invertujeme takto:

$$(E_i(\alpha) \mid I_n) = \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \alpha & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & 1/\alpha & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{array}\right) = (I_n \mid E_i(\alpha^{-1})).$$

Druhou:

$$(E_{ij}(\alpha) \mid I_n) = \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ & \ddots & \ddots & & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 & \ddots & \vdots \\ & \alpha & & \ddots & 0 & \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & \vdots & & & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 & & -\alpha & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & & & & & 1 \end{array}\right) = (I_n \mid E_{ij}(-\alpha)).$$

Třetí:

$$(E_{ij} \mid I_n) = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) = (I_n \mid E_{ij}).$$

Tudíž $E_i(\alpha)^{-1} = E_i(\alpha^{-1})$, $E_{ij}(\alpha)^{-1} = E_{ij}(-\alpha)$ a $E_{ij}^{-1} = E_{ij}$.

2) Druhý způsob je využitím významu elementárních matic. První matice $E_i(\alpha)$ násobí i-tý řádek číslem $\alpha \neq 0$. Inverzní operace je vydělení i-tého řádku číslem α, což je representováno maticí $E_i(\alpha^{-1})$. Zkouška $E_i(\alpha)E_i(\alpha^{-1}) = I$ pak skutečně ověří, že se jedná o inverzní matici.

Druhá matice $E_{ij}(\alpha)$ přičte α-násobek j-tého řádku k i-tému. Inverzní operace je odečtení α-násobku j-tého řádku od i-tého, což je representováno maticí $E_{ij}(-\alpha)$. Zkouška opět ověří, že se jedná o inverzní matici.

Třetí matice E_{ij} prohazuje i-tý a j-tý řádek. Inverzní operace je tatéž, výměna i-tého a j-tého řádku. Tudíž matice E_{ij} inverzní sama k sobě.

Cv. 4.5 Invertujte matici řádu n:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{pmatrix}$$

Řešení:

Podle postupu sestavíme rozšířenou matici:

$$(A \mid I_n) = \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 2 & \dots & 2 & 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 3 & \vdots & \ddots & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Od řádků 2 až n odečteme první řádek a dostaneme

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & -1 & 1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & 1 & 2 & \dots & 2 & \vdots & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & n-1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{array}\right).$$

V levé části je vpravo dole je matice stejného typu jako A, pouze o řád menší. Postupujeme tedy indukcí dále a po dalších $n-2$ krocích dostaneme

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & -1 & 1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & 1 & \dots & 1 & 0 & \ddots & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & -1 & 1 \end{array}\right).$$

Nyní od prvního řádku odečteme druhý, pak od druhého třetí, atd. až od předposledního ten poslední. Dostaneme matici, kde hledaná inverze A^{-1} je napravo

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & 1 & & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & -1 & 1 \end{array}\right).$$

Cv. 4.6 Zjednodušte následující výraz, kde A, B jsou regulární matice stejného řádu:

$$(I - B^T A^{-1})A + (A^T B)^T A^{-1}.$$

Řešení:
S využitím základních vlastností maticového součinu, transpozice a inverze odvodíme

$$\begin{aligned} &(I - B^T A^{-1})A + (A^T B)^T A^{-1} \\ &\qquad = IA - B^T A^{-1} A + (A^T B)^T A^{-1} \quad \text{[distributivita]} \\ &\qquad = IA - B^T I + (A^T B)^T A^{-1} \quad \text{[definice inverze]} \\ &\qquad = A - B^T + (A^T B)^T A^{-1} \quad \text{[násobení maticí } I\text{]} \\ &\qquad = A - B^T + B^T A A^{-1} \quad \text{[transpozice součinu matic]} \\ &\qquad = A - B^T + B^T \quad \text{[definice inverze]} \\ &\qquad = A. \end{aligned}$$

Celý výraz se tak zjednodušil na matici A.

Cv. 4.7 (a) Dokažte, že pro $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$, kde A regulární, platí

$$(ABA^{-1})^k = AB^k A^{-1}.$$

(b) Buď $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ regulární matice. Najděte limitu (pokud nevíte, co je limita, tak použijte intuici)

$$\lim_{k \to \infty} AD^k A^{-1}, \quad \text{kde} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \frac{1}{n} \end{pmatrix}$$

a určete její hodnost.

(c) Aplikujte předchozí na matici A, jejíž první sloupec i řádek je tvořený jednotkovým vektorem $e_1 = (1, 0, \dots, 0)^T$.

Řešení:

(a) Postupujeme matematickou indukcí. Pro $k = 1$ tvrzení platí, protože $(ABA^{-1})^1 = AB^1A^{-1}$.

Indukční krok. Nechť tvrzení platí pro $k-1$, tedy $(ABA^{-1})^{k-1} = AB^{k-1}A^{-1}$. Upravíme za použití indukčního předpokladu

$$\begin{aligned}(ABA^{-1})^k &= (ABA^{-1})^{k-1}(ABA^{-1}) = (AB^{k-1}A^{-1})(ABA^{-1})\\ &= AB^{k-1}(A^{-1}A)BA^{-1} = AB^{k-1}BA^{-1}\\ &= AB^kA^{-1}.\end{aligned}$$

(b) Podle předchozího bodu máme

$$\begin{aligned}AD^kA^{-1} &= A\begin{pmatrix}1^k & 0 & \dots & 0\\ 0 & \frac{1}{2^k} & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \dots & 0 & \frac{1}{n^k}\end{pmatrix}A^{-1}\\ &\xrightarrow[k\to\infty]{} A\begin{pmatrix}1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \dots & 0 & 0\end{pmatrix}A^{-1} = A_{*1}(A^{-1})_{1*}.\end{aligned}$$

Matice má hodnost 1, neboť je vnějším součinem dvou vektorů.

(c) Je-li $A_{*1} = e_1$ a $A_{1*} = e_1^T$, pak nutně totéž platí i pro inverzní matici, konkrétně $(A^{-1})_{1*} = e_1^T$. Tudíž

$$\lim_{k\to\infty} AD^kA^{-1} = A_{*1}(A^{-1})_{1*} = e_1e_1^T = \begin{pmatrix}1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \dots & 0 & 0\end{pmatrix}.$$