Příklady na procvičení z Lineární algebry 1 (ZS 2020/2021): (5) Grupy a tělesa

Cv. 1. Zjistěte, zda je grupou:

(a) $(\mathbb{Q}, \cdot)$,

(b) $(\mathbb{Q}, -)$,

(c) $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \circ)$, kde $a \circ b = |ab|$ pro všechna $a, b \in \mathbb{Q}$,

(d) $(\mathbb{Q}, \circ)$, kde $a \circ b = \frac{a+b}{2}$ pro všechna $a, b \in \mathbb{Q}$,

(e) $(\mathbb{Q}, \circ)$, kde $a \circ b = a + b + 3$ pro všechna $a, b \in \mathbb{Q}$,

(f) $(\mathcal{F}, +)$, tj. množina $\mathcal{F}$ všech reálný funkcí jedné proměnné s operace sčítání funkcí,

(g) množina rotací v $\mathbb{R}^2$ kolem počátku s operací skládání zobrazení,

(h) množina posunutí v $\mathbb{R}^2$ s operací skládání zobrazení.

Cv. 2. Vyplňte tabulku pro binární operaci $\circ$ na $\mathbb{G}$ tak aby $(\mathbb{G}, \circ)$ byla grupou s neutrálním prvkem 0. Zdůvodněte.

(a)

$\circ$	0	1
0		
1		

(b)

$\circ$	0	1	2
0			
1			
2			

(c)

$\circ$	0
0	

(d)

$\circ$	0	1	2	3
0				
1		0		
2				
3				

Cv. 3. Nechť $(\mathbb{G}, \circ)$ je grupa a $x \in \mathbb{G}$. Rozhodněte, zda $(\mathbb{G}, *)$ je grupou s operací definovanou $a * b = a \circ x \circ b$ pro všechna $a, b \in \mathbb{G}$.

Cv. 4. Rozhodněte a zdůvodněte, zda je Abelovou (komutativní) grupou:

(a) množina $\{\left(\begin{smallmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \mid z \in \mathbb{Z}\}$ s maticovým součinem,

(b) množina $\{\left(\begin{smallmatrix} a & a \\ a & a \end{smallmatrix}\right) \mid a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$ s maticovým součinem.

Cv. 5. Vyjádřete jako prvky daného tělesa výrazy:

(a) $((2^{-1} + 1)4)^{-1}, 4/3$ v $\mathbb{Z}_5$,

(b) $6 + 7, -7, 6 \cdot 7, 7^{-1}, 6/7$ v $\mathbb{Z}_{11}$.

Cv. 6. Nad $\mathbb{Z}_5$ najděte množinu všech řešení soustavy rovnic

$$\begin{aligned} 3x + 2y + z &= 1 \\ 4x + y + 3z &= 3 \end{aligned}$$

a spočítejte její mohutnost.

Cv. 7. Nalezněte multiplikativní inverzy 9^{-1} a 12^{-1} v $\mathbb{Z}_{31}$.

Cv. 8. V $\mathbb{Z}_7$ spočítejte mocninu matice A^{100} pro matici $A = \left(\begin{smallmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{smallmatrix}\right)$.