

7. Vektorové prostory a podprostory, lineární obal

Cv. 7.1 Rozhodněte, pro která $a \in \mathbb{Z}_7$ tvoří množina

$$S_a = \{(x, y, z)^T : x + 2y - 3z = a\}$$

vektorový podprostor \mathbb{Z}_7^3 . Kolik má tento vektorový podprostor prvků?

Řešení:

Pokud S_a má být vektorový podprostor \mathbb{Z}_7^3 , tak musí obsahovat nulový vektor, tedy $(0, 0, 0)^T$. Vidíme tedy, že musí platit $a = 0 + 2 \cdot 0 - 3 \cdot 0 = 0$. Dále tedy předpokládejme, že $a = 0$. Dokažme nyní, že v takovém případě o vektorový podprostor jde. K tomu stačí ověřit uzavřenost na násobky prvky ze \mathbb{Z}_7 a na sčítání vektorů.

Uzavřenost na násobky Je-li $(x, y, z) \in S_0$ a $\alpha \in \mathbb{Z}_7$, tak $\alpha x + 2\alpha y - 3\alpha z = \alpha(x + 2y - 3z) = \alpha \cdot 0 = 0$, a tedy i $\alpha(x, y, z) = (\alpha x, \alpha y, \alpha z) \in S_0$.

Uzavřenost na sčítání Pro $(x, y, z) \in S_0$ a $(x', y', z') \in S_0$, díky distributivitě, komutativitě a asociativitě sčítání v \mathbb{Z}_7 platí $(x+x') + 2(y+y') - 3(z+z') = (x+2y-3z) + (x'+2y'-3z') = 0+0 = 0$, a tedy i $(x+x', y+y', z+z') \in S_0$.

Nyní spočteme počet prvků S_0 . Pro libovolnou volbu x a y dostáváme právě jeden prvek z (totiž $\frac{x+2y}{3} = 5x + 3y$), který splňuje $x + 2y - 3z = 0$. Jelikož máme 7 možností pro x a 7 možností pro y , podprostor S_0 má celkem $7 \cdot 7 = 49$ prvků.

Závěr: O vektorový prostor se jedná pouze pro $a = 0$, v kterémžto případě má tento prostor 49 prvků.

Cv. 7.2 Nad \mathbb{Z}_{11} určete průnik řešení soustavy rovnic $Ax = 0$ a lineárního obalu množiny vektorů $\{v_1, v_2, v_3\}$, přičemž

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Řešení:

Nejprve vyřešíme danou soustavu rovnic.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -7 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -7 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 7 & 5 \end{pmatrix}.$$

Množina všech řešení tedy vychází $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; r, s \in \mathbb{Z}_{11} \right\}$.

Musíme zjistit, které z těchto vektorů se dají vyjádřit jako $a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3$, kde $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{Z}_{11}$. Označíme-li $w_1 := (1, 6, 0, 1)^T$ a $w_2 = (0, 4, 1, 0)^T$, máme

vlastně vyřešit rovnici $a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 = rw_1 + sw_2$, neboli $a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 + r(-w_1) + s(-w_2) = 0$:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & -6 & -4 \\ 1 & 3 & -2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} &\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -4 & -4 \\ 0 & 3 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 3 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

z čehož vidíme, že $r = 0$ a $s = 0$, neboli jediným vektorem v průniku je $0 \cdot w_1 + 0 \cdot w_2$, čili nulový vektor.

Cv. 7.3 Tvoří všechny polynomy proměnné X s koeficienty nad \mathbb{Z}_3 stupně nejvýše 10 vektorový prostor? Kolik má tento prostor prvků?

Řešení:

Ano, 3^{11} .

Cv. 7.4 Nad \mathbb{Z}_7 určete, kolik prvků má následující průnik lineárních obalů

$$\text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} \right\} \cap \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Řešení:

Označme dané vektory v_1, v_2, v_3 a w_1, w_2, w_3 . Nyní stačí vyřešit rovnici $xv_1 + yv_2 + zv_3 = rw_1 + sw_2 + tw_3$, podívat se, jaké možné kombinace hodnot r, s, t vyšly a těmi přenásobit w_1, w_2, w_3 . (Pokud by dané vektory byly lineárně závislé, mohlo by se stát, že více řešení dá ten samý vektor.) Odpověď: 49.

Cv. 7.5 Uvažme vektorový prostor všech funkcí z \mathbb{N} do \mathbb{Z}_2 . Pro $i \in \mathbb{N}$ buď a_i funkce, která prvek i zobrazí na 1 a vše ostatní na 0. Buď b funkce, která vše zobrazí na jedničku. Leží b v lineárním obalu $\text{span}\{a_i, i \in \mathbb{N}\}$?

Řešení:

Neleží, v lineárním obalu leží jen lineární kombinace konečného počtu vektorů, a to b není.

Cv. 7.6 Je-li \mathbb{T} (komutativní) těleso, tak každý podprostor \mathbb{T}^n lze popsat dvěma různými způsoby: Buď jakožto řešení systému rovnic, nebo jako lineární obal nějakých vektorů.

(a) Nad \mathbb{Q} popište řešení homogenní soustavy $Ax = 0$, kde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

jako lineární obal vektorů.

Řešení:

Jde vlastně o to, vyřešit danou soustavu rovnic. Řešení lze zapsat např. ve tvaru

$$\{r \cdot (3, 1, -5, 0)^T + s \cdot (1, 0, -5, 1)^T; r, s \in \mathbb{Q}\}.$$

Tedy výsledkem je $\text{span}\{(3, 1, -5, 0)^T, (1, 0, -5, 1)^T\}$.

(b) Najděte soustavu rovnic, jejímž řešením bude lineární obal vektorů

$$(1, 2, -1, 0)^T \text{ a } (1, 0, 0, 1)^T.$$

Řešení:

Hledáme vlastně taková čísla a, b, c, d , aby platilo

$$1 \cdot a + 2 \cdot b - 1 \cdot c + 0 = 0,$$

$$1 \cdot a + 0 \cdot b + 0 \cdot c + 1 \cdot d = 0.$$

Jinými slovy řešíme homogenní rovnici s maticí

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nestačí však najít jedno řešení (to by množina řešení výsledné soustavy mohla vyjít větší než onen požadovaný lineární obal).

Výsledkem je například homogenní soustava $Ax = 0$, kde

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$