7. Vektorové prostory a podprostory, lineární obal

Cv. 7.1 Rozhodněte, pro která $a \in \mathbb{Z}_7$ tvoří množina

$$S_a = \{(x, y, z)^T : x + 2y - 3z = a\}$$

vektorový podprostor $\mathbb{Z}_7^3$. Kolik má tento vektorový podprostor prvků?

Cv. 7.2 Nad $\mathbb{Z}_{11}$ určete průnik řešení soustavy rovnic $Ax = 0$ a lineárního obalu množiny vektorů $\{v_1, v_2, v_3\}$, přičemž

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \ v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Cv. 7.3 Tvoří všechny polynomy proměnné X s koeficienty nad $\mathbb{Z}_3$ stupně nejvýše 10 vektorový prostor? Kolik má tento prostor prvků?

Cv. 7.4 Nad $\mathbb{Z}_7$ určete, kolik prvků má následující průnik lineárních obalů

$$\operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} \right\} \bigcap \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Cv. 7.5 Uvažme vektorový prostor všech funkcí z $\mathbb{N}$ do $\mathbb{Z}_2$. Pro $i \in \mathbb{N}$ buď a_i funkce, která prvek i zobrazí na 1 a vše ostatní na 0. Buď b funkce, která vše zobrazí na jedničku. Leží b v lineárním obalu $\operatorname{span}\{a_i, i \in \mathbb{N}\}$?

Cv. 7.6 Je-li $\mathbb{T}$ (komutativní) těleso, tak každý podprostor $\mathbb{T}^n$ lze popsat dvěma různými způsoby: Buď jakožto řešení systému rovnic, nebo jako lineární obal nějakých vektorů.

(a) Nad $\mathbb{Q}$ popište řešení homogenní soustavy $Ax = 0$, kde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

jako lineární obal vektorů.

(b) Najděte soustavu rovnic, jejímž řešením bude lineární obal vektorů

$$(1, 2, -1, 0)^T \ \text{ a } \ (1, 0, 0, 1)^T.$$