Příklady na procvičení z Lineární algebry 1 (ZS 2020/2021): (11) Lineární zobrazení

Cv. 1. Rozhodněte a dokažte, zda-li zobrazení $f : R \to R$ je/není lineární zobrazení.

(a) $f_1(x) = 0$
(b) $f_2(x) = 1$
(c) $f_3(x) = 2x$
(d) $f_4(x) = x + 1$
(e) $f_5(x) = x^2$

Řešení:
Dle Definice 6.1 (Lineární zobrazení) Buďte U, V vektorové prostory nad tělesem $\mathbb{T}$. Zobrazení $f : U \to V$ je lineární, pokud pro každé $x, y \in U$ a $\alpha \in T$ platí:

- $f(x + y) = f(x) + f(y)$
- $f(\alpha x) = \alpha f(x)$.

(a) Ověříme platnost podmínek lineárního zobrazení z definice:
  i. $f_1(x + y) = f_1(z) = 0 = 0 + 0 = f_1(x) + f_1(y)$ podmínka platí
  ii. $f_1(\alpha x) = f_1(w) = 0 = \alpha 0 = \alpha f_1(x)$ podmínka platí.

  Obě podmínky jsou splněny, zobrazení f_1 je lineární.

(b) Analogicky ověříme podmínky u zobrazení f_2:
  i. $f_2(x + y) = f_2(z) = 1 \neq 2 = 1 + 1 = f_2(x) + f_2(y)$ podmínka neplatí
  ii. dále bychom již nemuseli počítat, ale pro zajímavost prozkoumáme, zdali zobrazení homomorfní k druhé operaci „násobení skalárem z tělesa“ $f_2(\alpha x) = f_2(w) = 1 \neq \alpha = \alpha 1 = \alpha f_2(x)$, pro obecné $\alpha \in R$ podmínka neplatí.

  Obě podmínky nejsou splněny, zobrazení není lineární.

(c) Postup u zobrazení f_3 je také analogický:
  i. $f_3(x+y) = f_3(z) = 2z = 2(x+y) = 2(x)+2(y) = f_3(x)+f_3(y)$ podmínka platí
  ii. $f_3(\alpha x) = f_3(w) = 2w = 2\alpha x = \alpha 2x = \alpha f_3(x)$ podmínka platí.

  Obě podmínky jsou splněny, zobrazení je lineární.

Cv. 2. Rozhodněte a dokažte, zda-li zobrazení $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ je/není lineární zobrazení.

(a) $f_6(x, y) = (x + y, x - y)$
(b) $f_7(x, y) = (x - y, x - y)$

Řešení:

(a) Analogicky se předchozím příkladem, je však třeba si dát pozor na indexování vektorů. Ano zobrazení f_6 je lineární.

Cv. 3. Pro lineární zobrazení $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dané přepisem $f(x, y) = (x, -y)$ vypočtěte matici lineárního zobrazení.

Řešení:
Navrhneme dva způsoby výpočtu matice zobrazení:

(a) Využijeme tvrzení, že lineární zobrazení je popsáno obrazem báze. Zobrazení si vyjádříme vůči kanonickým bázím ${}_{kan}[f]_{kan}$. Vybereme kanonickou bázi $\mathbb{R}^2$, kterou zobrazením zobrazíme

$$f\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\right)_{kan} = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}_{kan}$$

Vyjádřeno vůči kanonické bázi se matice obrazu nezmění je tedy se jedná o matici zobrazení

$${}_{kan}[f]_{kan} = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}$$

(b) Budeme počítat matici zobrazení vůči kanonickým bázím ${}_{kan}[f]_{kan}$. A využijeme vyjádření ze znalosti vzoru X a obrazu $FX = Y$.

$$f(X) = f\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}$$

Ze vztahu $F = YX^{-1}$ vypočteme matici zobrazení

$$F = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}$$

Cv. 4. Vypočtěte matici F lineárního zobrazení $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, které po řadě zobrazí vektory:

$$f((1, -3, 1)^T) = (-1, 1, 0)^T \tag{1}$$
$$f((0, 3, -2)^T) = (0, 1, -1)^T \tag{2}$$
$$f((-1, -2, 2)^T) = (1, 0, 1^T) \tag{3}$$

Řešení:
Matici lineárních zobrazení lze vypočítat i ze znalosti vektorů a jejich obrazů. Mějme množinu vektorů X a jejich obrazů Y. Vektory X je na vektory Y zobrazí maticí lineárního zobrazení F pronásobením $FX = Y$. Je-li matice X regulární, pak existuje její inverzní matice X^{-1}. Upravíme rovnici pronásobením maticí X^{-1} zprava, dostaváme $FXX^{-1} = YX^{-1}$, což se rovná $F = YX^{-1}$.
Matice X je maticí vzorových vektorů zapsaných po sloupcích a matice Y je po sloupcích zapsanou maticí obrazů vektorů:

$$X = \begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\-3 & 3 & -2\\1 & -2 & 2\end{pmatrix}$$

$$Y = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

.

Inverzní matice X^{-1} k matici X se rovná:

$$X^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -3 \\ -4 & -3 & -5 \\ -3 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

Výsledná matice zobrazení F se rovná:

$$F = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -6 & -5 & -8 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

.

Cv. 5. Mějme vektorový prostor $U = \mathbb{R}^3$ a zobrazení $f : U \to U$ a mějme jeho bázi $B_U = \{(-1, 0, 3)^T, (2, -2, 2)^T, (0, 1, -3)^T\}$. Vypočtěte matici F lineárního zobrazení $f : U = \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, o kterém víme, že zobrazí bazické vektory: $F = {}_{B_U}[f]_{B_U}$

$$\begin{aligned} f((-1, 0, 3)^T) &= (-2, 0, 6)^T \\ f((2, -2, 2)^T) &= (4, -4, 4)^T \\ f((0, 1, -3)^T) &= (0, 2, -6)^T \end{aligned}$$

Všimněme si, že vektory jsou „2-krát zvětšeny“.
Maticí F, reprezentující lineární zobrazení f, zobrazte vektor $[x]_{B_U} = (1, 2, -1)^T$ tj. dostaneme vektor $[f([x]_{B_U})]_{B_U}$.

<u>Řešení:</u>

Využijeme Definice 6.17 (Matice lineárního zobrazení), Věty 6.19 (Maticová reprezentace lineárního zobrazení) ze skript a také tvrzení, že každé lineární zobrazení je definováno obrazem báze.
Nejprve si připomeneme konstrukci matice lineárního zobrazení obecně, následně ji uchopíme intuitivně a nakonec do obecné konstrukce dosadíme konkrétní zadání úlohy.
Mějme vektorové prostory U a V na tělesem T a lineární zobrazení $f : U \to V$. Vektorový prostor U je popsán bází $B_U = \{x_1, ..., x_n\}$ a vektorový prostor V je popsán bází $B_V = \{y_1, ..., x_m\}$. *Matice lineárního zobrazení* $f : U \to V$, dle Definice 6.17, je definována ${}_{B_V}[f]_{B_U} = [f(x_j)]_{B_V}$.
Intuitivně: matici lineárního zobrazení konstruujeme tak, že j-tý sloupec matice je tvořen souřadnicemi zobrazeného vektoru x_j vůči bázi B_V, resp. sloupcový vektor x_j zobrazíme a dostáváme vektor $f(x_j)$ a tento obraz vyjádříme vůči bázi B_V tj. dostáváme sloupcový vektor zmíněné $[f(x_j)]_{B_V}$. Matici konstruujme postupně přes všechny bazické vektory.
Otázka pro lehké rozmyšlení a ověření si, že konstrukci matice lineárního zobrazení rozumíme: máme-li n vektorů báze B_U a m vektorů báze B_V kolik bude mít výsledná matice F sloupců a kolik řádků? Proč lze každé lineární zobrazení zapsat maticově?
Zpět k řešení příkladu. Konstruujeme matici lineárního zobrazení ${}_{B_U}[f]_{B_U}$ z definice. V konkrétním zadání příkladu zobrazení $f : U \to U$ tedy počítáme s jednou

bází a jedním vektorovým prostorem. Ukážeme si výpočet prvního sloupce matice F. Mějme první bazický vektor tj. $x_1 = (-1,0,3)^T$, který se zobrazí zobrazením $f((-1,0,3)^T) = (-2,0,6)^T$. Následně vektor $f(x_1)$ vyjádříme vůči bázi B_U. Řešíme soustavu lineárních rovnic $Ax = b$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} | & | & | & | \\ x_1 & x_2 & x_3 & f(x_1) \\ | & | & | & | \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -3 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

,

přičemž vektory byly napsány jako sloupce matice, vektory báze B_U jako levá část matice a vektor $f(x_1)$ jako vektor pravá strana matice.

Povšimněme si, že podle sloupcové interpretace řešení soustavy lineárních rovnic platí, že má-li soustava řešení, pravá strana matice b je rovna lineární kombinaci sloupců matice, přičemž jednotlivé proměnné x jsou koeficienty této lineární kombinace a geometricky určují „míru naškálování“ příslušných sloupců matice. Tedy díváme-li se na sloupce matice soustavy jako na bázi, tak výsledný vektor řešení x udává souřadnice vektoru pravé strany b vůči bázi dané sloupci matice tj. $[b]_{S(A)} = x$. (V případě, že sloupce matice netvoří bázi, jsou ale generátory $S(A)$ a stále platí $b \in S(A)$, pak se nejedná o souřadnice ale o koeficienty lineární závislosti.)

Výpočet vyjádření vektorů vůči bázi lze provést paralelně:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} | & | & | & | & | & | \\ B_{U_1} & B_{U_2} & B_{U_3} & f(x_1) & f(x_2) & f(x_3) \\ | & | & | & | & | & | \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} | & | & | & | & | & | \\ x_1 & x_2 & x_3 & f(x_1) & f(x_2) & f(x_3) \\ | & | & | & | & | & | \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & 0 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & -4 & 2 \\ 3 & 2 & -3 & 6 & 4 & -6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

.

Sloupcové vektory pravé strany matice tj. řešení soustavy, tvoří sloupce hledané matice lineárního zobrazení F: $F = {}_{B_U}[f]_{B_U} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Intuitivně: Vypočítali jsme matici zobrazení, která zobrazuje vektor x vyjádřený vůči bázi B_U, provede s ním transformaci (2-krát zvětší) a ponechá ho vyjádřený vůči bázi B_U. Jedná se o matici škálování, které libovolný vektor naškáluje 2-krát.

Otázka: Matice škálování vypadá „povědomě“ či „očekávatelně“. Jakou roli v tomto zobrazení hraje báze? Jak se změní matice zobrazení, změníme-li bázi resp. budeme-li mít matici zobrazení vůči jiné bázi ${}_{B_V}[f]_{B_V}$? Změní se vůbec? Na tomto místě si můžete udělat alespoň odhad.

Dle Důsledku 6.20. provedeme zobrazení vektoru $[x]_{B_U} = (1,2,-1)^T$ zobrazením f: $f(x) = Fx = [f([x]_{B_U})]_{B_U} = (2,4,-2)^T$.