

12. Matice přechodu a matice lineárního zobrazení

Cv. 12.1 Mějme vektorový prostor $U = \mathbb{R}^3$ a zobrazení $f: U \rightarrow U$ a mějme jeho bázi

$$B_U = \{(-1, 0, 3)^T, (2, -2, 2)^T, (0, 1, -3)^T\}.$$

Vypočtete matici $F = {}_{B_U}[f]_{B_U}$ lineárního zobrazení f , o kterém víme, že zobrazí bazické vektory:

$$f((-1, 0, 3)^T) = (-2, 0, 6)^T$$

$$f((2, -2, 2)^T) = (4, -4, 4)^T$$

$$f((0, 1, -3)^T) = (0, 2, -6)^T$$

Všimněme si, že vektory jsou „2-krát zvětšeny“.

Maticí F , reprezentující lineární zobrazení f , zobrazte vektor $[x]_{B_U} = (1, 2, -1)^T$, tj. dostaneme vektor $[f([x]_{B_U})]_{B_U}$.

Řešení:

Využijeme definice matice lineárního zobrazení, maticové reprezentace lineárního zobrazení a také tvrzení, že každé lineární zobrazení je definováno obrazem báze. Nejprve si připomeneme konstrukci matice lineárního zobrazení obecně, následně ji uchopíme intuitivně a nakonec do obecné konstrukce dosadíme konkrétní zadání úlohy.

Mějme vektorové prostory U a V na tělese T a lineární zobrazení $f: U \rightarrow V$. Vektorový prostor U je popsán bází $B_U = \{x_1, \dots, x_n\}$ a vektorový prostor V je popsán bází $B_V = \{y_1, \dots, y_m\}$. Matice lineárního zobrazení $f: U \rightarrow V$ je definována tak, že j -tý sloupec ${}_{B_V}[f]_{B_U}$ je $[f(x_j)]_{B_V}$.

Intuitivně: matici lineárního zobrazení konstruujeme tak, že j -tý sloupec matice je tvořen souřadnicemi zobrazeného vektoru x_j vůči bázi B_V , resp. sloupcový vektor x_j zobrazíme a dostáváme vektor $f(x_j)$ a tento obraz vyjádříme vůči bázi B_V tj. dostáváme sloupcový vektor zmíněné $[f(x_j)]_{B_V}$. Matici konstruujeme postupně přes všechny bazické vektory.

Otázka pro lehké rozmyšlení a ověření si, že konstrukci matice lineárního zobrazení rozumíme: máme-li n vektorů báze B_U a m vektorů báze B_V kolik bude mít výsledná matice F sloupců a kolik řádků? Proč lze každé lineární zobrazení zapsat maticově?

Zpět k řešení příkladu. Konstruujeme matici lineárního zobrazení ${}_{B_U}[f]_{B_U}$ z definice. V konkrétním zadání příkladu zobrazení $f: U \rightarrow U$ tedy počítáme s jednou bází a jedním vektorovým prostorem. Ukážeme si výpočet prvního sloupce matice F . Mějme první bazický vektor, tj. $x_1 = (-1, 0, 3)^T$, který se zobrazí zobrazením $f((-1, 0, 3)^T) = (-2, 0, 6)^T$. Následně vektor $f(x_1)$ vyjádříme vůči bázi B_U . Řešíme soustavu lineárních rovnic $Ax = b$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} | & | & | & | \\ x_1 & x_2 & x_3 & f(x_1) \\ | & | & | & | \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -3 & 6 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right),$$

přičemž vektory byly napsány jako sloupce matice, vektory báze B_U jako levá část matice a vektor $f(x_1)$ jako vektor pravé strany matice.

Povšimněme si, že podle sloupcové interpretace řešení soustavy lineárních rovnic platí, že má-li soustava řešení, pravá strana matice b je rovna lineární kombinaci sloupců matice, přičemž jednotlivé proměnné x jsou koeficienty této lineární kombinace a geometricky určují „míru naškálování“ příslušných sloupců matice. Tedy díváme-li se na sloupce matice soustavy jako na bázi, tak výsledný vektor řešení x udává souřadnice vektoru pravé strany b vůči bázi dané sloupci matice, tj. $[b]_{S(A)} = x$. (V případě, že sloupce matice netvoří bázi, jsou ale generátory $S(A)$ a stále platí $b \in \mathcal{S}(A)$, pak se nejedná o souřadnice ale o koeficienty lineární závislosti.)

Výpočet vyjádření vektorů vůči bázi lze provést paralelně:

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|ccc} | & | & | & | & | & | \\ B_{U_1} & B_{U_2} & B_{U_3} & f(x_1) & f(x_2) & f(x_3) \\ | & | & | & | & | & | \end{array} \right) &\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} | & | & | & | & | & | \\ x_1 & x_2 & x_3 & f(x_1) & f(x_2) & f(x_3) \\ | & | & | & | & | & | \end{array} \right) \sim \\ &\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & 0 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & -4 & 2 \\ 3 & 2 & -3 & 6 & 4 & -6 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Sloupcové vektory pravé strany matice, tj. řešení soustavy, tvoří sloupce hledané matice lineárního zobrazení F :

$$F = {}_{B_U}[f]_{B_U} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Intuitivně: Vypočítali jsme matici zobrazení, která zobrazuje vektor x vyjádřený vůči bázi B_U , provede s ním transformaci (2-krát zvětší) a ponechá ho vyjádřený vůči bázi B_U . Jedná se o matici škálování, které libovolný vektor naškáluje 2-krát.

Otázka: Matice škálování vypadá „povědomě“ či „očekávatelně“. Jakou roli v tomto zobrazení hraje báze? Jak se změní matice zobrazení, změníme-li bázi resp. budeme-li mít matici zobrazení vůči jiné bázi ${}_{B_V}[f]_{B_V}$? Změní se vůbec? Na tomto místě si můžete udělat alespoň odhad.

Zobrazení vektoru $[x]_{B_U} = (1, 2, -1)^T$ provedeme zobrazením $f(x) = Fx = [f([x]_{B_U})]_{B_U} = (2, 4, -2)^T$.

Cv. 12.2 Upravme zadání. Co když chci 2-krát škálovat z vektorového prostoru U daného bázi $B_U = \{x_1 = (-1, 0, 3)^T, x_2 = (2, -2, 2)^T, x_3 = (0, 1, -3)^T\}$ do jiného vektorového prostoru V daného bázi $B_V = \{y_1 = (-1, 1, 0)^T, y_2 = (0, 1, -1)^T, y_3 = (1, 0, 1)^T\}$? Jaké zobrazení konstruujeme?

Maticí zobrazení zobrazte vektor $[x]_{B_U}$, tj. dostaneme vektor $[f([x]_{B_U})]_{B_V}$.

Cv. 12.3 Upravme zadání. Co když chci 2-krát škálovat z vektorového prostoru U do jiného vektorového prostoru V ? Zobrazení $f: U \rightarrow V$.

Vektorové prostory zadány bázi:

$$\begin{aligned} B_U &= \{x_1 = (-1, 0, 3)^T, x_2 = (2, -2, 2)^T, x_3 = (0, 1, -3)^T\}, \\ B_V &= \{y_1 = (-1, 1, 0)^T, y_2 = (0, 1, -1)^T, y_3 = (1, 0, 1)^T\}. \end{aligned}$$

Jak bude vypadat matice takového zobrazení? Jaké zobrazení konstruujeme?

Maticí zobrazení zobrazte vektor $[x]_{B_U}$, tj. dostaneme vektor $[f([x]_{B_U})]_{B_V}$.

Řešení:

Konstruujeme matici lineárního zobrazení ${}_{B_V}[f]_{B_U}$ z definice.

Princip výpočtu zůstává stejný. Změna oproti předchozímu příkladu proběhne v kroku vyjádření obrazů vektorů, kde místo báze B_U vyjadřujeme vektoru vůči bázi B_V , do které zobrazení zobrazuje.

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|ccc} | & | & | & | & | & | \\ B_{V_1} & B_{V_2} & B_{V_3} & f(x_1) & f(x_2) & f(x_3) \\ | & | & | & | & | & | \end{array} \right) &\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} | & | & | & | & | & | \\ y_1 & y_2 & y_3 & f(x_1) & f(x_2) & f(x_3) \\ | & | & | & | & | & | \end{array} \right) \sim \\ &\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 1 & -2 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 6 & 4 & -6 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & -2 \end{array} \right). \end{aligned}$$

$$\text{Výsledná matice } {}_{B_V}[f]_{B_U} = \begin{bmatrix} -2 & -2 & -2 \\ -4 & -2 & 4 \\ 2 & 2 & -2 \end{bmatrix}.$$

Zobrazme zadaný vektor $[x]_{B_U} = (1, 2, -1)^T$ lineárním zobrazením reprezentovaný maticí ${}_{B_V}[f]_{B_U}$. Řešení:

$$[f([x]_{B_U})]_{B_V} = {}_{B_V}[f]_{B_U} \cdot [x]_{B_U} = Fx = (2, -12, 8)^T.$$

Cv. 12.4 Upravme zadání: Co když oproti předchozího případu, zobrazení nebude transformovat, ale jen měníme bázi (vektorový prostor)?

Maticí přechodu vypočtete souřadnice vektoru $[x]_{B_U}$ vůči bázi B_V , tj. $[x]_{B_V}$.

Řešení:

Počítáme matici přechodu ${}_{B_V}[id]_{B_U}$ od báze B_U vektorového prostoru U k bázi B_V vektorového prostoru V .

Mnemotechnická pomůcka výpočtu: $(B_V|B_U) \stackrel{RREF}{\sim} (I_n | {}_{B_V}[id]_{B_U})$.

Postup obdobný předchozímu příkladu. Rozdíl je v kroku, kdy nebudeme provádět transformaci, resp. transformace je realizována identickým zobrazením. Do výpočtu matice lineárního zobrazení dle definice dosadíme takto:

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|ccc} | & | & | & | & | & | \\ B_{V_1} & B_{V_2} & B_{V_3} & B_{U_1} & B_{U_2} & B_{U_3} \\ | & | & | & | & | & | \end{array} \right) &\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} | & | & | & | & | & | \\ y_1 & y_2 & y_3 & x_1 & x_2 & x_3 \\ | & | & | & | & | & | \end{array} \right) \sim \\ &\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 3 & 2 & -3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array} \right). \end{aligned}$$

$$\text{Výsledná matice } {}_{B_V}[id]_{B_U} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Zobrazme zadaný konkrétní vektor $[x]_{B_U} = (1, 2, -1)^T$ lineárním zobrazením reprezentovaný maticí ${}_{B_V}[id]_{B_U}$. Řešení:

$${}_{B_V}[id]_{B_U} [x]_{B_U} = [id([x]_{B_U})]_{B_V} = (1, -6, 4)^T.$$

Pro kontrolu lze vypočítat souřadnice vektoru vyjádřením vůči bázi soustavou přes lineární kombinaci.

Cv. 12.5 V předchozích příkladech, jak vypadá matice přechodu od báze B_V k bázi B_U ? (výpočet z definice)

Maticí přechodu vypočtete souřadnice vektoru $[x]_{B_V}$ vůči bázi B_U , tj. $[x]_{B_U}$.

Řešení:

V předchozím postupu zaměníme levou a pravou stranu matice pro výpočet vyjádření do báze.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} | & | & | & | & | & | \\ x_1 & x_2 & x_3 & y_1 & y_2 & y_3 \\ | & | & | & | & | & | \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -3 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & 4 \end{array} \right).$$

$$\text{Výsledná matice } F = {}_{B_U}[id]_{B_V} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Řešení: } {}_{B_U}[id]_{B_V} [x]_{B_V} = (1, 2, -1)^T.$$

Pro kontrolu lze vypočítat souřadnice vektoru vyjádřením vůči bázi.

Cv. 12.6 Jiný způsob výpočtu: Vypočtete matici přechodu od báze B_V k bázi B_U pomocí výpočtu inverzní matice, známe-li matici přechodu ${}_{B_V}[id]_{B_U}$.

Řešení:

Vyžijeme teorie: Buď U a V vektorové prostory a $f: U \rightarrow V$ isomorfismus, pak ${}_{B_U}[f^{-1}]_{B_V} = ({}_{B_V}[f]_{B_U})^{-1}$. Předpokládejme nyní, že víme, že zobrazení ${}_{B_V}[id]_{B_U}$ je isomorfismus.

$${}_{B_U}[id^{-1}]_{B_V} = ({}_{B_V}[id]_{B_U})^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Čímž jsme spočítali matici přechodu dvěma způsoby: a) výpočtem z definice matice lineárního zobrazení, b) výpočet inverzního zobrazení v případě izomorfního zobrazení.

Cv. 12.7 Známe matici ${}_{B_U}[f]_{B_U}$ lineárního zobrazení $f: U \rightarrow U$ a chceme ji vyjádřit vůči bázi B_V .

Řešení:

Způsoby řešení již známe více:

(a) Matici můžeme sestavit přímo z definice analogicky postupu sestavení matice ${}_{B_U}[f]_{B_U}$.

(b) Můžeme využít již spočítaných výsledků a skládání lineárních zobrazení:

$${}_{B_V}[f]_{B_V} = {}_{B_V}[id]_{B_U} \cdot {}_{B_U}[f]_{B_U} \cdot {}_{B_U}[id]_{B_V}.$$

Intuitivně: zobrazovaný vektor vůči bázi B_V se zobrazí maticí přechodu ${}_{B_U}[id]_{B_V}$ vůči bázi B_U , následně se transformuje maticí ${}_{B_U}[f]_{B_U}$ a vyjádří se zpět maticí přechodu ${}_{B_V}[id]_{B_U}$ vůči bázi B_V .

Cv. 12.8 Mějme matici M lineárního zobrazení. Kolik lineárních zobrazení popisuje matice M ?

Řešení:

Jedná se o lehce zavádějící otázku. Odpověď záleží na podmínce, jestli máme definované báze vůči nimž zobrazení definujeme. V případě, že ano, pak matice M reprezentuje jen jedno lineární zobrazení a toto lineární zobrazení je reprezentováno právě jednou maticí, jedná se o důsledek věty o jednoznačnosti matice lineárního zobrazení. Pokud však není uvedeno, vůči jaké bázi se zobrazení vyjadřuje, pak ke každé bázi existuje jedno lineární zobrazení.

Cv. 12.9 Mějme lineární zobrazení $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathcal{P}^2$ dané maticí

$$F = {}_{B_V}[f]_{B_U} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & -2 \end{pmatrix},$$

kde

$$B_U = \{(-1, 0, 3)^T, (2, -2, 2)^T, (0, 1, -3)^T\},$$

$$B_V = \{-x^2 + x, x - 1, x^2 + 1\}.$$

Určete, zda je zobrazení:

(a) prosté

(b) na

Řešení:

- (a) Protože $\text{rank}(F) = 2$ a pro každé lineární zobrazení $f: U \rightarrow V$ je $\dim(U) = \dim(\text{Ker}(f)) + \dim(f(U))$, tudíž $\dim(\text{Ker}(f)) = 3 - \text{rank}(F) = 1$. Z netriviálnosti jádra zobrazení plyne, že zobrazení f není prosté. Alternativně, zobrazení dané maticí F není prosté, protože F nemá lineárně nezávislé sloupce.
- (b) Víme, že platí $\dim(f(U)) = \dim(\mathcal{S}(F)) = \text{rank}(F)$, kde $\dim(f(U))$ určuje dimenzi obrazu zobrazení f . Z hodnoty dimenze vektorového prostoru \mathcal{P}^2 , které má dimenzi $\dim(\mathcal{P}^2) = 3$, platí $\dim(f(U)) < \dim(\mathcal{P}^2)$. Proto není zobrazení „na“. Alternativně, zobrazení dané maticí F není „na“ protože, dle F nemá lineárně nezávislé řádky.

Cv. 12.10 Mějme lineární zobrazení $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definované maticí

$$A = {}_{\text{kan}}[f]_B = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nalezněte dva různé (nenulové) vektory $x, y \in \mathbb{R}^3$ takové že:

- (a) $f(x) = f(y) = (-3, -1, 0)^T$
 (b) $f(x) = f(y)$

Řešení:

- (a) V řeči lineárních zobrazení hledáme vektor x , který se zobrazí zobrazením f na zadaný vektor $b = f(x)$ V řeči:
- i. lineárních zobrazení $x \xrightarrow{f} f(x)$
 - ii. matic lineárních zobrazení $x \xrightarrow{A} b$
 - iii. maticových reprezentací soustav lineárních rovnic $Ax = b$; přičemž, lze-li soustavu lineárních rovnic vyřešit, platí $b \in \mathcal{S}(A)$, tedy b je lineární kombinací sloupcových vektorů matice A , kde řešení x udává „naškálování“ těchto vektorů.

Sestavíme a vyřešíme soustavu lineárních rovnic

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -1 & -2 & -3 \\ 2 & 3 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Z řešení vidíme, že matice má netriviální kernel a tedy nekonečno řešení. Určíme si dvě konkrétní řešení např. $x = (1, -1, 0)^T$, $y = (0, -2, -1)^T$. Můžeme provést kontrolu zobrazením vektorů. Tyto vektory jsou souřadnice vektorů vůči bázi B .

- (b) V tomto případě nemáme zadaný vektor $f(x) = f(y)$, ke kterému hledáme vzor. Co s tím? Přibyl nám jeden volný parametr. Dílčím řešením úlohy je, jeden vektor $f(x)$ zvolit. Víme ale pak, že $f(x) \in \mathcal{S}(A)$, resp. že má soustava

řešení? Zvolme tedy $f(x)$ takové, že $f(x) \in \mathcal{S}(A)$. Zvolíme si náhodný vektor (výběru sloupců matice A – sloupcová interpretace řešení soustav lineárních rovnic), např. $x = (1, -1, 0)^T$ (zvolena byla taková čísla, aby se s nimi dobře počítalo), a vypočteme jeho obraz $f(x) = Ax$. (Což je způsob, jak byl zkonstruován tento příklad.) Přičemž situaci převádíme na předchozí případ.