

12. Matice přechodu a matice lineárního zobrazení

Cv. 12.1 Mějme vektorový prostor $U = \mathbb{R}^3$ a zobrazení $f: U \rightarrow U$ a mějme jeho bázi

$$B_U = \{(-1, 0, 3)^T, (2, -2, 2)^T, (0, 1, -3)^T\}.$$

Vypočtete matici $F = {}_{B_U}[f]_{B_U}$ lineárního zobrazení f , o kterém víme, že zobrazí bazické vektory:

$$f((-1, 0, 3)^T) = (-2, 0, 6)^T$$

$$f((2, -2, 2)^T) = (4, -4, 4)^T$$

$$f((0, 1, -3)^T) = (0, 2, -6)^T$$

Všimněme si, že vektory jsou „2-krát zvětšeny“.

Maticí F , reprezentující lineární zobrazení f , zobrazte vektor $[x]_{B_U} = (1, 2, -1)^T$, tj. dostaneme vektor $[f([x]_{B_U})]_{B_U}$.

Cv. 12.2 Upravme zadání. Co když chci 2-krát škálovat z vektorového prostoru U daného bází $B_U = \{x_1 = (-1, 0, 3)^T, x_2 = (2, -2, 2)^T, x_3 = (0, 1, -3)^T\}$ do jiného vektorového prostoru V daného bází $B_V = \{y_1 = (-1, 1, 0)^T, y_2 = (0, 1, -1)^T, y_3 = (1, 0, 1)^T\}$? Jaké zobrazení konstruujeme?

Maticí zobrazení zobrazte vektor $[x]_{B_U}$, tj. dostaneme vektor $[f([x]_{B_U})]_{B_V}$.

Cv. 12.3 Upravme zadání. Co když chci 2-krát škálovat z vektorového prostoru U do jiného vektorového prostoru V ? Zobrazení $f: U \rightarrow V$.

Vektorové prostory zadány bází:

$$B_U = \{x_1 = (-1, 0, 3)^T, x_2 = (2, -2, 2)^T, x_3 = (0, 1, -3)^T\},$$

$$B_V = \{y_1 = (-1, 1, 0)^T, y_2 = (0, 1, -1)^T, y_3 = (1, 0, 1)^T\}.$$

Jak bude vypadat matice takového zobrazení? Jaké zobrazení konstruujeme?

Maticí zobrazení zobrazte vektor $[x]_{B_U}$, tj. dostaneme vektor $[f([x]_{B_U})]_{B_V}$.

Cv. 12.4 Upravme zadání: Co když oproti předchozího případu, zobrazení nebude transformovat, ale jen měníme bázi (vektorový prostor)?

Maticí přechodu vypočtete souřadnice vektoru $[x]_{B_U}$ vůči bázi B_V , tj. $[x]_{B_V}$.

Cv. 12.5 V předchozích příkladech, jak vypadá matice přechodu od báze B_V k bázi B_U ? (výpočet z definice)

Maticí přechodu vypočtete souřadnice vektoru $[x]_{B_V}$ vůči bázi B_U , tj. $[x]_{B_U}$.

Cv. 12.6 Jiný způsob výpočtu: Vypočtete matici přechodu od báze B_V k bázi B_U pomocí výpočtu inverzní matice, známe-li matici přechodu ${}_{B_V}[id]_{B_U}$.

Cv. 12.7 Známe matici ${}_{B_U}[f]_{B_U}$ lineárního zobrazení $f: U \rightarrow U$ a chceme ji vyjádřit vůči bázi B_V .

Cv. 12.8 Mějme matici M lineárního zobrazení. Kolik lineárních zobrazení popisuje matice M ?

Cv. 12.9 Mějme lineární zobrazení $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathcal{P}^2$ dané maticí

$$F = {}_{B_V}[f]_{B_U} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & -2 \end{pmatrix},$$

kde

$$B_U = \{(-1, 0, 3)^T, (2, -2, 2)^T, (0, 1, -3)^T\},$$
$$B_V = \{-x^2 + x, x - 1, x^2 + 1\}.$$

Určete, zda je zobrazení:

- (a) prosté
- (b) na

Cv. 12.10 Mějme lineární zobrazení $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definované maticí

$$A = {}_{\text{kan}}[f]_B = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nalezněte dva různé (nenulové) vektory $x, y \in \mathbb{R}^3$ takové že:

- (a) $f(x) = f(y) = (-3, -1, 0)^T$
- (b) $f(x) = f(y)$