13. Obraz, jádro, isomorfismus

Cv. 13.1 Rozhodněte, zda zobrazení $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dané předpisem

$$f(x, y, z) = (x + y - 2z,\ y - z,\ x - y)^T$$

je isomorfismem $\mathbb{R}^3$ na sebe sama (takzvaným automorfismem).

Řešení:
Isomorfismus dvou vektorových prostorů je vzájemně jednoznačné lineární zobrazení (tedy lineární zobrazení, které je bijekce). Budeme chtít zjistit dimenzi jádra (pokud je zobrazení prosté, tak má být nulová) a dimenzi obrazu = dimenzi sloupcového prostoru (pokud má být zobrazení „na“, tak musí být stejná jako dimenze prostoru, do kterého to zobrazení jde).

Sestavíme matici zobrazení vůči kanonické bázi (jakákoliv báze by posloužila stejně):

$${}_{\text{kan}}[f]_{\text{kan}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Abychom určili rank této matice, provedeme Gaussovu eliminaci:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vidíme, že dimenze jádra matice je rovna jedné, takže zobrazení není prosté. To můžeme i snadno ověřit: $f(0, 0, 0) = (0, 0, 0)^T = f(1, 1, 1)$.

Obdobně dimenze sloupcového prostoru je rovná dvěma (vzpomeňte na větu, že dimenze sloupcového a řádkového prostoru se rovnají). Tedy funkce není „na“. Opět bychom mohli ověřit, že například vektor $(0, 0, 1)^T$ není v obraze (stejná Gaussova eliminace doplněná o pravou stranu).

Cv. 13.2 Mějme lineární zobrazení $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadané obrazem báze B:

$$\begin{aligned} f(2, 1, 1) &= (1, 2, 3)^T, \\ f(1, 3, 5) &= (3, 2, 1)^T, \\ f(7, 1, 4) &= (1, 1, 1)^T. \end{aligned}$$

Zjistěte, jestli je zobrazení prosté (pokud není, najděte vektory $u, v \in \mathbb{R}^3$ takové, že $u \neq v \wedge f(u) = f(v)$) a jestli je „na“ (pokud ne, najděte vektor, který nemá předobraz, tedy $u \in \mathbb{R}^3$ takové že $\forall v \in \mathbb{R}^3\colon f(v) \neq u$). Určete dimenzi a bázi obrazu a jádra tohoto lineárního zobrazení.

Řešení:
Prostota: Napřed určíme, jestli je zobrazení prosté (injektivní). Pokud by nebylo, pak by nutně existovaly dva různé vektory $u, v \in \mathbb{R}^3$ (z definičního oboru)

takové, že $f(u) = f(v)$. Upravme si tuto situaci:

$$\begin{aligned} f(u) &= f(v), \\ {}_A[f]_B \cdot [u]_B &= {}_A[f]_B \cdot [v]_B, \\ {}_A[f]_B \cdot [u]_B - {}_A[f]_B \cdot [v]_B &= o, \\ {}_A[f]_B \cdot ([u]_B - [v]_B) &= o, \end{aligned}$$

kde ${}_A[f]_B$ značí matici lineárního zobrazení a $[u]_B, [v]_B$ značí vektory souřadnic vektorů u, v vůči bázi B, tedy $[f(u)]_A = {}_A[f]_B \cdot [u]_B$. V našem případě je báze A kanonická báze. Tedy pokud je zobrazení prosté, pak jeho matice má ve svém jádře jediný vektor o.

Sestrojíme tedy matici (bude brát vektory souřadnic v bázi B a vracet vektory souřadnic v kanonické bázi):

$${}_{\text{kan}}[f]_B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pomocí Gaussovy eliminace najdeme její jádro:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & -1 \\ 0 & -8 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vidíme, že jádro má dimenzi jedna a všechna řešení této homogenní soustavy mají tvar: $\left\{(-\frac{1}{4}t, -\frac{1}{4}t, t)^T \mid t \in \mathbb{R}\right\}$. Tedy můžeme volit vektor $[u]_B = (1, 1, -4)^T$, tedy $u = (31, 8, 8)^T$, který se zobrazí na nulu (stejně jako nulový vektor)

$$f(0, 0, 0) = (0, 0, 0)^T = f(31, 8, 8).$$

Všimněte si, že souřadnice vektoru z jádra matice byly vůči bázi B, my chtěli souřadnice vektoru u v kanonické bázi, museli jsme tedy ještě řešit převod mezi souřadnicemi.

Dimenze jádra: Vzhledem k tomu, že jádro lineárního zobrazení má dimenzi jedna, tak jeho bázi může tvořit například vektor $(31, 8, 8)^T$ (vzpomeňte, jak jsme na něj přišli – platí, že $[(31, 8, 8)^T]_B = (1, 1, -4)$).

Obraz a surjektivita (jestli je "na"): Každý vektor z obrazu je lineární kombinací sloupcových vektorů. Speciálně existuje vektor $a \in \mathbb{R}^3$ takový, že $f(a) = (1, 2, 3)^T$ (psáno v kanonické bázi), to byl náš zadaný vektor $(2, 1, 1)^T$, který měl v bázi B souřadnice $[(2, 1, 1)^T]_B = (1, 0, 0)^T$.

Z minulé Gaussovy eliminace vidíme, že dimenze obrazu (což je dimenze sloupcového prostoru, což dle věty z přednášky je rovné dimenzi řádkového prostoru) je rovná dvěma a její báze jsou například první dva vektory: $(1, 2, 3)^T$, $(3, 2, 1)^T$ (obraz je pak lineární obal těchto dvou vektorů). Dimenze obrazu je tedy dva a zobrazení f není „na“ (surjektivní).

Vektor mimo obraz: Doplněním těchto dvou vektorů na bázi $\mathbb{R}^3$ získáme vektor, který nemá předobraz ve zobrazení f. Například to může být vektor $(0, 0, 1)^T$ (pokud bychom nedoplňovali z kanonické báze, ale z jiné, mohl nám vyjít jiný vektor).

Cv. 13.3 Nechť $f: U \to V$, $g: V \to W$ jsou isomorfismy vektorových prostorů. Dokažte, že $g \circ f: U \to W$ je také isomorfismus vektorových prostorů (tedy že isomorfismus je ekvivalence). Speciálně ukažte, že:

(a) Jsou-li f, g prostá, pak $g \circ f$ je prosté.

(b) Jsou-li f, g „na“, pak $g \circ f$ je „na“.

Řešení:

(a) Jsou-li f, g prostá, pak $g \circ f$ je prosté: Víme, že:

$$\forall u_1, u_2 \in U \, : u_1 \neq u_2 \;\; \Rightarrow \;\; f(u_1) \neq f(u_2),$$
$$\forall v_1, v_2 \in V \, : v_1 \neq v_2 \;\; \Rightarrow \;\; g(v_1) \neq g(v_2).$$

Chceme:

$$\forall u_1, u_2 \in U \, : u_1 \neq u_2 \;\; \Rightarrow \;\; g(f(u_1)) \neq g(f(u_2)).$$

Vezmeme-li libovolná různá $u_1, u_2 \in U$: $u_1 \neq u_2$, pak $f(u_1) \neq f(u_2)$ jsou různá (f je prostá). Z toho, že g je prostá a $f(u_1), f(u_2) \in U$: $f(u_1) \neq f(u_2)$ máme $g(f(u_1)) \neq g(f(u_2))$.

(b) Jsou-li f, g „na“, pak $f \circ g$ je „na“: Jen nápověda: pro libovolné $w \in W$ napřed najdeme jeho předobraz v g, pak předobraz předobrazu v f.

Cv. 13.4 Rozhodněte, jestli jsou následující dvojice vektorových prostorů isomorfní:

(a) $\mathbb{R}^{2\times 2}$ a $\mathbb{R}^4$,

(b) $\mathbb{R}^4$ a $\mathcal{P}^3$ (prostor reálných polynomů stupně nejvýš tři),

(c) $\mathbb{R}^{m\times n}$ a $\mathbb{R}^{n\times m}$,

(d) $\mathbb{R}^n$ nad $\mathbb{R}$ a $\mathbb{C}^n$ nad $\mathbb{C}$,

(e) $\mathbb{R}^2$ a $\{v \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 = x_3 + x_4 = 0\}$,

(f) prostor všech reálných polynomů a prostor všech reálných posloupností,

(g) $\mathbb{R}^4$ a lineární zobrazení $f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$.

Řešení:

(a) $\mathbb{R}^{2\times 2}$ a $\mathbb{R}^4$.

Ano, ověřte zobrazení

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}.$$

(b) $\mathbb{R}^4$ a $\mathcal{P}^3$ (prostor reálných polynomů stupně nejvýš tři).

Ano, reálný polynom stupně nejvýš tři můžeme reprezentovat jeho koeficienty (čtyři reálná čísla taková, že $p(x) = p_0 + p_1x + p_2x^2 + p_3x^3$). Každá čtveřice čísel nám dá jeden polynom a každý polynom nám dá jednu čtveřici čísel.

(c) $\mathbb{R}^{m\times n}$ a $\mathbb{R}^{n\times m}$.

Ano, isomorfismem bude transpozice (to je asi ten nejpřirozenější isomorfismus mezi těmito prostory).

(d) $\mathbb{R}^2$ a $\{v \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 = x_3 + x_4 = 0\}$.

Ano, můžeme volit například zobrazení

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a \\ -a \\ b \\ -b \end{pmatrix}$$

(e) Prostor všech reálných polynomů a prostor všech reálných posloupností.

Ne, intuitivně protože nemáme polynomy nekonečného stupně, ale máme například posloupnost $a_n = 1$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.

(f) $\mathbb{R}^4$ a lineární zobrazení $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$.

Ano, vektoru $u \in \mathbb{R}^4$ přiřadíme lineární zobrazení $f(v) = u^T v$. Naopak každé lineární zobrazení $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ se dá zapsat maticí s jedním řádkem a čtyřmi sloupci (věta z přednášky).

Cv. 13.5 Pro lineární zobrazení $f\colon \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ dané předpisem $A \mapsto (A - A^T)$ rozhodněte které vektory patří do jádra a které do obrazu:

(a) I_2,

(b) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$,

(d) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Řešení:

(a) I_2.

Patří do jádra, neboť $I_2 - I_2^T = 0$ (nulová matice). Nepatří do obrazu, neboť každá matice v obrazu má nulovou diagonálu (na diagonále se prvky odečtou).

(b) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Patří do jádra i do obrazu (je obrazem sama sebe).

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Patří do jádra, ale nepatří do obrazu.

(d) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Nepatří do jádra, ale je obrazem (mimo jiných, protože diagonálu můžeme volit libovolně) matice:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ -1/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Cv. 13.6 Uvažujme lineární zobrazení $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Označme lineární zobrazení $f^1 = f$, $f^2 = f \circ f$, $f^n = f \circ f^{n-1}$. Ukažte, že $\mathrm{Ker}(f^n) \subseteq \mathrm{Ker}(f^{n+1})$.

Řešení:

Napřed si zobrazení f vyjádříme maticí, tedy existuje $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ taková, že $A = {}_{\mathrm{kan}}[f]_{\mathrm{kan}}$ (používáme A, protože toto značení je kratší). Tedy $\forall v \in \mathbb{R}^n\colon f(v) = Av$. Navíc ale máme $\forall v \in \mathbb{R}^n\colon f^n(v) = A^n v$.

Pokud $v \in \mathrm{Ker}(f^n)$, pak $f^n(v) = o$, tedy $A^n v = o$. Pak ale jistě

$$A^{n+1}v = A(A^n v) = Ao = o.$$

Tedy $v \in \mathrm{Ker}(f^n) \Rightarrow v \in \mathrm{Ker}(f^{n+1})$, tudíž $\mathrm{Ker}(f^n) \subseteq \mathrm{Ker}(f^{n+1})$.

Cv. 13.7 Rozhodněte, zda lineární zobrazení je prosté a zda je „na“:

(a) $f\colon \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^3$ dané předpisem $f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a+b+c,\ a+b,\ a)^T$,

(b) $f\colon \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^4$ dané předpisem $f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a+b+c+d, a+b+c,\ a+b,\ a)^T$,

(c) $f\colon \mathcal{P}^2 \to \mathbb{R}^4$ dané předpisem $f(ax^2+bx+c) = (a+b,\ 2b-c,\ a-b+c,\ a+b)^T$,

(d) $f\colon \mathcal{P}^2 \to \mathbb{R}^3$ dané předpisem $f(ax^2+bx+c) = (a+b,\ 2b-c,\ a-b+c)^T$,

(e) $f\colon \mathcal{P}^2 \to \mathbb{R}^3$ dané předpisem $f(ax^2+bx+c) = (a+b,\ 2b-c,\ a-b+2c)^T$.

Řešení:

(a) $f\colon \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^3$ dané předpisem $f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a+b+c,\ a+b,\ a)^T$.

Je „na“, ale není prosté.

(b) $f\colon \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^4$ dané předpisem $f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a+b+c+d,\ a+b+c,\ a+b,\ a)^T$.

Je „na“ a je prosté.

(c) $f\colon \mathcal{P}^2 \to \mathbb{R}^4$ dané předpisem $f(ax^2+bx+c) = (a+b,\ 2b-c,\ a-b+c,\ a+b)^T$.

Není na (první a poslední souřadnice výsledku jsou vždy stejné), ani prosté ($f(x^2-x-2) = (0,0,0,0)^T$).

Cv. 13.8 Ukažte, že pro (každé dvě) matice $A \in \mathbb{R}^{m\times p}$, $B \in \mathbb{R}^{p\times n}$ platí

$$\dim(\mathrm{Ker}(A) \cap \mathcal{S}(B)) = \mathrm{rank}(B) - \mathrm{rank}(AB).$$

Řešení:

Nechť dimenze prostoru $\mathrm{Ker}(A) \cap \mathcal{S}(A)$ a $v_1, v_2, \ldots, v_k$ je jeho báze, doplňme ji na bázi celého $\mathcal{S}(A)$ pomocí vektorů $w_1, w_2, \ldots, w_\ell$. Pak $\mathrm{rank}(B) = \dim(\mathcal{S}(B)) = k + \ell$. Chceme ukázat, že $\mathrm{rank}(AB) = \dim(\mathcal{S}(AB)) = \ell$. Uvědomme si, že obraz AB můžeme zkoumat zkoumáním toho, kam A zobrazí bázi $v_1, \ldots, v_k, w_1, \ldots, w_\ell$. Bázi $v_1, \ldots, v_k$ zobrazí na nulový vektor. Pokud by vektory $Aw_1, Aw_2, \ldots, Aw_\ell$ byly lineárně závislé:

$$\begin{aligned} \alpha_1 A w_1 + \alpha_2 A w_2 + \ldots + \alpha_\ell A w_\ell &= o, && \text{(alfy netriviální)} \\ A\,(\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \ldots + \alpha_\ell w_\ell) &= o. \end{aligned}$$

Ale druhý řádek je spor, neboť z volby vektorů $w_1, \ldots, w_\ell$ víme, že žádná netriviální kombinace vektorů w_j není v jádře matice A.