

14. Afinní podprostory

Cv. 14.1 Ukažte, že množina řešení (řešitelné) soustavy $Ax = b$ je afinní množina a to tak, že je uzavřená na afinní kombinace.

Řešení:

Označme jako $X = \{x^* \in \mathbb{R}^n; Ax^* = b\}$ množinu řešení soustavy $Ax = b$. Pro $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$ (tedy $x_i : Ax_i = b$) má platit, že jejich libovolná afinní kombinace opět náleží do X , totiž

$$A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n) = b, \quad \text{kde} \quad \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1.$$

Úpravou, kdy vytkneme jednotlivá α_i dostáváme z výrazu na levé straně

$$\alpha_1 Ax_1 + \alpha_2 Ax_2 + \dots + \alpha_n Ax_n = \alpha_1 b + \alpha_2 b + \dots + \alpha_n b.$$

Vytkneme zprava vektor b a ze vztahu $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$ dostáváme

$$(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n)b = b.$$

Proto libovolná afinní kombinace řešení soustavy $Ax = b$ je opět jejím řešením.

Cv. 14.2 Rozhodněte, zda vektory

$$x_0 = (1, 2, 3)^T, \quad x_1 = (2, 3, 1)^T, \quad x_2 = (1, 3, 2)^T, \quad x_3 = (2, 1, 3)^T$$

jsou afinně nezávislé.

Řešení:

Spočítáme vektory

$$x_1 - x_0 = (1, 1, -2)^T, \quad x_2 - x_0 = (0, 1, -1)^T, \quad x_3 - x_0 = (1, -1, 0)^T.$$

Tyto tři vektory jsou lineárně závislé (generují dvou-dimenzionální podprostor), proto jsou původní vektory afinně závislé.

Cv. 14.3 Rozhodněte, zda vektory

$$x_0 = (1, 0, 2)^T, \quad x_1 = (2, 2, 1)^T, \quad x_2 = (2, 1, 3)^T, \quad x_3 = (3, 3, 2)^T$$

leží v jedné rovině.

Řešení:

Zadané vektory x_0, x_1, x_2, x_3 leží v jedné rovině právě tehdy, když dimenze afinního podprostoru $\text{span}\{x_1 - x_0, x_2 - x_0, x_3 - x_0\}$ je rovna 2. Nejprve spočítáme $x_1 - x_0 = (1, 2, -1)^T$, $x_2 - x_0 = (1, 1, 1)^T$, $x_3 - x_0 = (2, 3, 0)^T$ a následně dimenzi jejich lineárního obalu pomocí hodnoty následující matice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vidíme, že hodnota matice je 2, tedy vektory $x_1 - x_0, x_2 - x_0, x_3 - x_0$ leží v rovině procházející počátkem a proto x_0, x_1, x_2, x_3 leží v rovině.

Cv. 14.4 Rozhodněte, zda $M = N$ pro

$$(a) \quad M = \text{span}\{(1, 2)^T\} + (1, 1)^T, \quad N = \text{span}\{(2, 4)^T\} + (2, 3)^T,$$

$$(b) \quad M = \text{span}\{(1, 2, 1)^T, (2, 1, 0)^T\} + (1, 0, 0)^T, \quad N = \text{span}\{(0, 3, 2)^T, (3, 0, -1)^T\} + (2, -1, -1)^T.$$

Řešení:

- (a) Vidíme, že jak M , tak N jsou přímky (afinní podprostory dimenze 1), proto jediný vztah, v jakém mohou tyto afinní podprostory být, je rovnost. A rovnost nastane právě tehdy, když libovolný bod z M leží v N a naopak. Například $(1, 1)^T \in M$ se musí dát vyjádřit jako afinní kombinace bodů z N , tedy jako $(1, 1)^T = \alpha(2, 4)^T + (2, 3)^T$, kde $\alpha \in \mathbb{R}$. To nám dává soustavu dvou rovnic o 1 neznámé

$$2\alpha + 2 = 1,$$

$$4\alpha + 3 = 1,$$

která nemá řešení. Proto $(1, 1)^T \notin N$ a tedy $M \neq N$. Dokonce ani žádný vztah z $M \not\subseteq N$, $N \not\subseteq M$ není možný.

- (b) Opět musí platit, že libovolný vektor $a(1, 2, 1)^T + b(2, 1, 0)^T + (1, 0, 0)^T \in P$ pro $a, b \in \mathbb{R}$ náleží do Q , tedy se dá vyjádřit jako $c(0, 3, 2)^T + d(3, 0, -1)^T + (2, -1, -1)^T$ (pro $c, d \in \mathbb{R}$) a naopak. Musí proto platit mezi oběma výrazy rovnost

$$a(1, 2, 1)^T + b(2, 1, 0)^T + (1, 0, 0)^T = c(0, 3, 2)^T + d(3, 0, -1)^T + (2, -1, -1)^T,$$

která se dá zapsat soustavou tří rovnic jako

$$a + 2b + 1 = 3d + 2,$$

$$2a + b = 3c - 1,$$

$$a = 2c - d - 1.$$

Pokud budeme schopni c, d vyjádřit v závislosti na a, b , znamená to, že pro libovolný vektor z M daný souřadnicemi a, b jsme schopni nalézt odpovídající souřadnice c, d toho samého vektoru v N . Tedy ukážeme, že $M \subseteq N$. Podobně, pokud vyjádříme a, b v závislosti na c, d , dostaneme $N \subseteq M$ a v důsledku $M = N$.

Pojďme nejprve vyjádřit a, b v závislosti na $c, d \in \mathbb{R}$. Tím soustavu interpretujeme jako parametrickou soustavu, kde $c, d \in \mathbb{R}$ jsou parametry a a, b jsou neznámé. Rovnicově

$$a + 2b = 3d + 1,$$

$$2a + b = 3c - 1,$$

$$a = 2c - d - 1, \quad c, d \in \mathbb{R}$$

a maticově

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3d+1 \\ 2 & 1 & 3c-1 \\ 1 & 0 & 2c-d-1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2c-d-1 \\ 2 & 1 & 3c-1 \\ 1 & 2 & 3d+1 \end{array} \right) \sim \\ & \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2c-d-1 \\ 0 & 1 & -c+2d+1 \\ 0 & 2 & -2c+4d+2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2c-d-1 \\ 0 & 1 & -c+2d+1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Řešení soustavy je $a = 2c - d - 1$ a $b = -c + 2d + 1$.

Podobně pro $a, b \in \mathbb{R}$ parametry a, c, d neznámé interpretujeme soustavu rovnicově

$$\begin{aligned} 3d &= a + 2b - 1, \\ 3c &= 2a + b + 1, \\ 2c - d &= a + 1, \quad a, b \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

a maticově

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 3 & a+2b-1 \\ 3 & 0 & 2a+b+1 \\ 2 & -1 & a+1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 0 & 2a+b+1 \\ 0 & 3 & a+2b-1 \\ 2 & -1 & a+1 \end{array} \right) \sim \\ & \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{2a+b+1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{a+2b-1}{3} \\ 2 & -1 & \frac{3a+3}{3} \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{2a+b+1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{a+2b-1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{3a+3}{3} - 2\frac{2a+b+1}{3} + \frac{a+2b-1}{3} \end{array} \right). \end{aligned}$$

Platí, že $\frac{3a+3}{3} - 2\frac{2a+b+1}{3} + \frac{a+2b-1}{3} = 0$, tedy soustava má řešení $c = \frac{2a+b+1}{3}$ a $d = \frac{a+2b-1}{3}$. Tudíž $M \subseteq N$ a v důsledku $M = N$.

Cv. 14.5 Uvažujme dvě afinní zobrazení f, g v rovině, přičemž f představuje překlopení podle přímky $p : y = 10$ a g představuje překlopení podle přímky $q : x = 2$.

- Najděte maticový předpis zobrazení f ,
- najděte maticový předpis zobrazení g ,
- z předchozích předpisů odvoďte maticový předpis zobrazení $f \circ g$.

Řešení:

- Zobrazení $f(x)$ můžeme zkonstruovat pomocí složení trojice jednodušších afinních zobrazení f_1, f_2, f_3 tak, že nejprve posuneme vektor x o $(0, -5)^T$, provedeme překlopení podél osy x a následně posuneme daný vektor zpět o $(0, 5)^T$. Tato zobrazení můžeme vyjádřit jako

- $f_1(x) = x + (0, -5)^T$,
- $f_2(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} x = O_1 x$,

- $f_3(x) = x + (0, 5)^T$.

Dostáváme $f(x) = f_3(f_2(f_1(x))) = f_3(f_2(x + (0, -5)^T)) = f_3(O_1(x + (0, -5)^T)) = O_1(x + (0, -5)^T) + (0, 5)^T = O_1x + (0, 5)^T + (0, 5)^T = O_1x + (0, 10)^T$.

(b) Zobrazení $g(x)$ můžeme zkonstruovat podobně jako složení g_1, g_2, g_3 , kde

- $g_1(x) = x + (-2, 0)^T$ (posunutí o $(-2, 0)^T$),
- $g_2(x) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x = O_2x$ (rotace podél osy y),
- $g_3(x) = x + (2, 0)^T$ (posunutí nazpět o $(2, 0)^T$).

Složením dostáváme $g(x) = g_3(g_2(g_1(x))) = O_2x + (4, 0)^T$.

(c) Složení $f \circ g = f(g(x)) = f(O_2x + (4, 0)^T) = O_1(O_2x + (4, 0)^T) + (0, 10)^T = O_1O_2x + O_1(4, 0)^T + (0, 10)^T = O_1O_2x + (4, 0)^T + (0, 10)^T = O_1O_2x + (4, 10)^T$, po rozepsání maticového součinu

$$(f \circ g)(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Cv. 14.6 Dokažte, že vektory x_0, x_1, \dots, x_n jsou afinně nezávislé právě tehdy, když vektory $y_0 = (x_0^T, 1)^T, y_1 = (x_1^T, 1)^T, \dots, y_n = (x_n^T, 1)^T$ jsou lineárně nezávislé.

Řešení:

Důležité je zde uvědomit si, co za dodatečnou informaci nám dává struktura vektorů y_0, y_1, \dots, y_n . Z jejich struktury vyplývá, že $\sum_{i=0}^n \alpha_i y_i = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=0}^n \alpha_i x_i = 0$ a zároveň $\sum_{i=0}^n \alpha_i = 0$. Jedná se totiž pouze o rozdělení vektorové rovnice na 2 části, kde v první uvažujeme prvních n složek vektorů y_i a v druhé poslední $(n+1)$. složku. Schematicky,

$$\alpha_0 \begin{pmatrix} x_0 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ 1 \end{pmatrix} + \dots + \alpha_n \begin{pmatrix} x_n \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_n \\ 0 \end{pmatrix}$$

\Leftrightarrow

$$\alpha_0 x_0 + \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n = 0_n,$$

$$\alpha_0 \cdot 1 + \alpha_1 \cdot 1 + \dots + \alpha_n \cdot 1 = 0.$$

Důkaz tvrzení rozdělíme na 2 implikace.

- „Lineární závislost y_0, y_1, \dots, y_n implikuje afinní závislost x_0, x_1, \dots, x_n .“
Pokud jsou y_0, y_1, \dots, y_n lineárně závislé, pak platí

$$\sum_{i=0}^n \alpha_i y_i = 0$$

a zároveň existuje $j : \alpha_j \neq 0$. Můžeme proto vyjádřit y_j pomocí ostatních vektorů jako

$$y_j = \sum_{i \neq j} \beta_i y_i = \sum_{i \neq j} \frac{\alpha_i}{-\alpha_j} y_i.$$

Speciálně (omezíme-li se na prvních n složek) také

$$x_j = \sum_{i \neq j} \beta_i x_i = \sum_{i \neq j} \frac{\alpha_i}{-\alpha_j} x_i.$$

a (omezíme-li se na poslední složky y_i)

$$1 = \sum_{i \neq j} \beta_i x_i = \sum_{i \neq j} \frac{\alpha_i}{-\alpha_j}.$$

Vidíme, že x_j se dá vyjádřit jako afinní kombinace zbylých vektorů s koeficienty β_i . Vektory x_0, x_1, \dots, x_n jsou tedy afinně závislé.

- „Afinní závislost x_0, x_1, \dots, x_n implikuje lineární závislost y_0, y_1, \dots, y_n .“ Jsou-li x_0, x_1, \dots, x_n afinně závislé, pak existuje j takové, že

$$x_j = \sum_{i \neq j} \beta_i x_i \quad \text{a zároveň} \quad \sum_{i \neq j} \beta_i = 1.$$

Sloučením obou rovnic dostáváme

$$\begin{pmatrix} x_j \\ 1 \end{pmatrix} = \sum_{i \neq j} \beta_i \begin{pmatrix} x_i \\ 1 \end{pmatrix},$$

což je ekvivalentní

$$y_j = \sum_{i \neq j} \beta_i y_i.$$

Množina y_0, y_1, \dots, y_n je tudíž lineárně závislá.