Domácí úkoly z Lineární algebry 1 (ZS 2020/2021): (12) Lineární zobrazení: Obraz, jádro, isomorfismus

Úkol 12.1. Lineární zobrazení *merry*: $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ je dáno předpisem

$$\mathit{merry}(x, m, a, s) = \begin{pmatrix} x + 2m + s & m - 2a \\ x + 4a + s & m \end{pmatrix}.$$

(a) Určete bázi jádra a obrazu zobrazení *merry*.

(b) Rozhodněte, zda je zobrazení *merry* prosté, a zda je „na“. [3,5 b]

Úkol 12.2. Určete bázi jádra a obrazu lineárního zobrazení ☃: $\mathbb{R}^3 \to \mathcal{P}^2$ daného

$$\begin{aligned} ☃(1,0,1) &= 2x^2 + 2x + 2, \\ ☃(0,1,1) &= 3x^2 + 4x + 1, \\ ☃(1,1,0) &= 2x^2 + x + 4. \end{aligned}$$ [2,5 b]

Úkol 12.3. Najděte isomorfismus $f\colon ❄ \to ☆$ mezi prostory

$$❄ = \left\{v \in \mathbb{R}^4 \mid (1,2,3,4)v = 0\right\} \text{ a } ☆ = \left\{A \in \mathbb{R}^{2\times 2} \mid A^T = A\right\}.$$

Dokažte, že je zvolené zobrazení f isomorfismus. [2 b]