

## 2. Soustavy lineárních rovnic

**Cv. 2.1** Zapište rozšířenou matici soustavy

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 &= 6, \\ -3x_1 + x_2 &= 2,\end{aligned}$$

a vyřešte soustavu Gaussovou–Jordanovou eliminací. Znázorněte řešení soustavy graficky jako průsečík přímek (řádkový pohled) a jako součet vektorů (sloupcový pohled).

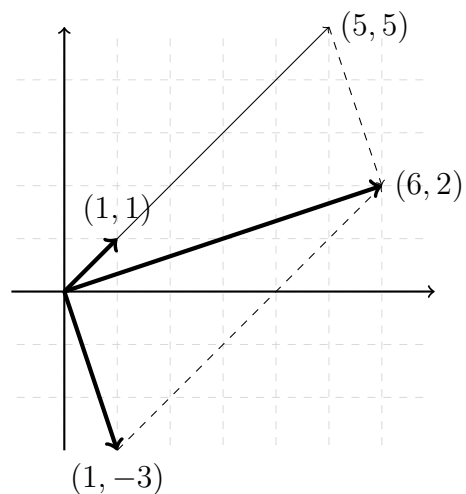
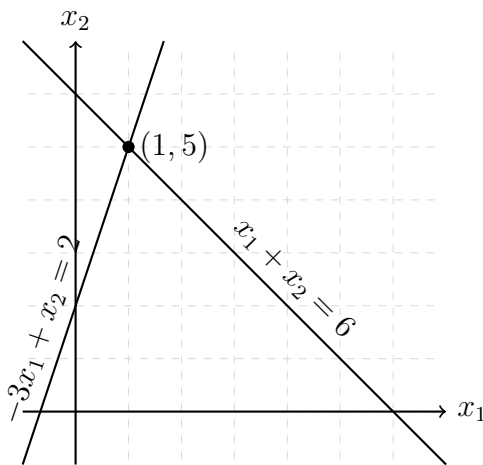
**Řešení:**

Rozšířená matice soustavy je

$$\left( \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 6 \\ -3 & 1 & 2 \end{array} \right).$$

Aplikací elementárních řádkových úprav snadno nalezneme řešení  $(x_1, x_2) = (1, 5)$ :

$$\left( \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 6 \\ -3 & 1 & 2 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 6 \\ 0 & 4 & 20 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 5 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{array} \right).$$



Rovnice  $x_1 + x_2 = 6$  a  $-3x_1 + x_2 = 2$  popisují dvě přímky v rovině, řešení soustavy  $(1, 5)$  je jejich průsečíkem.

Sloupce rozšířené matice soustavy můžeme zakreslit jako vektory v rovině. Řešení soustavy pak říká, že vektor  $(6, 2)$  dostaneme sečtením (1-krát prodlouženého) vektoru  $(1, -3)$  a 5-krát prodlouženého vektoru  $(1, 1)$ .

**Cv. 2.2** Vyřešte Gaussovou nebo Gaussovou–Jordanovou eliminací následující soustavy rovnic a určete hodnotu matic:

$$(a) \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 3 \end{array} \right), \quad (b) \left( \begin{array}{ccc|c} 5 & -3 & 6 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 3 & -1 \end{array} \right), \quad (c) \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & -1 & 7 \end{array} \right).$$

**Řešení:**

- (a) Aplikací elementárních řádkových úprav převedeme rozšířenou matici soustavy do odstupňovaného tvaru:

$$\begin{aligned} \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 3 \end{array} \right) &\sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 3 \\ 2 & -3 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 2 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & 5 & -10 & -10 \end{array} \right) \sim \\ &\sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -20 & -30 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Zpětnou substitucí získáme jediné řešení soustavy  $(x_1, x_2, x_3) = (-\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2})$ . Alternativně můžeme také použít Gaussovu–Jordanovu eliminaci a převést matici do redukovaného odstupňovaného tvaru

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} \end{array} \right).$$

Hodnost matice je daná počtem nenulových řádků (počtem pivotů) odstupňovaného tvaru. V tomto případě platí  $\text{rank}(A) = \text{rank}(A | b) = 3$ .

- (b) Opět upravíme matici pomocí elementárních řádkových úprav:

$$\begin{aligned} \left( \begin{array}{ccc|c} 5 & -3 & 6 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 3 & -1 \end{array} \right) &\sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 5 & -3 & 6 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & -1 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 7 & 1 & -13 \\ 0 & 7 & 1 & -7 \end{array} \right) \sim \\ &\sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 7 & 1 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Poslední řádek upravené matice reprezentuje rovnici  $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 5$ , soustava tedy nemá řešení.

Vidíme, že se v posledním sloupci upravené matice nachází pivot a hodnost rozšířené matice soustavy je  $\text{rank}(A | b) = 3$ , zatímco  $\text{rank}(A) = 2$ .

- (c) Aplikací elementárních úprav převedeme matici na tvar:

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & -1 & 7 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & -1 & 6 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right).$$

Nyní můžeme použít zpětnou substituci, nebo dále upravit matici až na redukovaný odstupňovaný tvar

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right).$$

Z posledního řádku upravené matice dostaneme  $x_4 = 0$ . Z druhého řádku můžeme vyjádřit  $x_2 = 3 - 2x_3$ , přičemž volnou proměnnou  $x_3$  ponecháme jako parametr. Nakonec z prvního řádku dostaneme  $x_1 = 1 + x_3$ . Soustava má tedy nekonečně mnoho řešení ve tvaru

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1 + x_3, 3 - 2x_3, x_3, 0) = (1, 3, 0, 0) + x_3 \cdot (1, -2, 1, 0).$$

V tomto případě opět platí  $\text{rank}(A) = \text{rank}(A | b) = 3$ , ale zároveň je  $\text{rank}(A)$  menší než počet proměnných.

**Cv. 2.3** Kolik existuje různých odstupňovaných tvarů pro matice  $3 \times 4$  (bez ohledu na konkrétní hodnoty prvků)? A kolik pro matice  $n \times n$ ?

**Řešení:**

Různé odstupňované tvary se odlišují počtem a pozicí pivotů. Matice  $3 \times 4$  v odstupňovaném tvaru může mít 0 až 3 pivoty (v každém řádku a sloupci nanejvýš 1). Pro matici hodnosti  $r$  se pivoty vždy nachází postupně v prvních  $r$  řádcích odstupňovaného tvaru, stačí proto uvažovat umístění pivotů do různých sloupců. Pro matici  $3 \times 4$  můžeme najít následujících 15 různých odstupňovaných tvarů:

- jeden odstupňovaný tvar s 0 pivoty (nulová matice):

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

- 4 odstupňované tvary s 1 pivotem:

$$\begin{pmatrix} \bullet & - & - & - \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \bullet & - & - \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & \bullet & - \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

- 6 odstupňovaných tvarů se 2 pivoty:

$$\begin{pmatrix} \bullet & - & - & - \\ 0 & \bullet & - & - \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bullet & - & - & - \\ 0 & 0 & \bullet & - \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bullet & - & - & - \\ 0 & 0 & 0 & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \bullet & - & - \\ 0 & 0 & \bullet & - \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \bullet & - & - \\ 0 & 0 & 0 & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & \bullet & - \\ 0 & 0 & 0 & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

- 4 odstupňované tvary se 3 pivoty:

$$\begin{pmatrix} \bullet & - & - & - \\ 0 & \bullet & - & - \\ 0 & 0 & \bullet & - \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bullet & - & - & - \\ 0 & \bullet & - & - \\ 0 & 0 & 0 & \bullet \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bullet & - & - & - \\ 0 & 0 & \bullet & - \\ 0 & 0 & 0 & \bullet \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \bullet & - & - \\ 0 & 0 & \bullet & - \\ 0 & 0 & 0 & \bullet \end{pmatrix}.$$

Obecně, matice  $n \times n$  může mít 0 až  $n$  pivotů, v každém z  $n$  sloupců se pivot buď nachází (v prvním řádku, který je dosud bez pivota), nebo nenachází, dostaneme tedy  $2^n$  možných různých odstupňovaných tvarů. Alternativně, pro  $k \in \{0, \dots, n\}$  pivotů máme  $\binom{n}{k}$  možných rozmístění do  $n$  sloupců, tj. celkem  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$  odstupňovaných tvarů.

**Cv. 2.4** Vyřešte soustavu lineárních rovnic s různými pravými stranami:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 1 & -5 & 4 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad b_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} -9 \\ 13 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad b_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -15 \end{pmatrix}.$$

**Řešení:**

Jelikož lze pro všechny tři soustavy použít Gaussovu eliminaci se stejnou sérií elementárních řádkových úprav, můžeme uvažovat všechny tři pravé strany najednou a aplikovat eliminaci na matici

$$\begin{aligned} & \left( \begin{array}{ccc|ccc} 0 & 2 & -3 & -1 & -9 & 1 \\ 1 & -5 & 4 & 1 & 13 & 5 \\ -3 & 1 & 2 & -3 & 3 & -15 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -5 & 4 & 1 & 13 & 5 \\ 0 & 2 & -3 & -1 & -9 & 1 \\ -3 & 1 & 2 & -3 & 3 & -15 \end{array} \right) \sim \\ & \sim \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -5 & 4 & 1 & 13 & 5 \\ 0 & 2 & -3 & -1 & -9 & 1 \\ 0 & -14 & 14 & 0 & 42 & 0 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -5 & 4 & 1 & 13 & 5 \\ 0 & 2 & -3 & -1 & -9 & 1 \\ 0 & 0 & -7 & -7 & -21 & 7 \end{array} \right) \sim \\ & \sim \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -5 & 4 & 1 & 13 & 5 \\ 0 & 2 & -3 & -1 & -9 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & -1 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & -1 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Řešením soustavy je tedy vektor  $x = (2, 1, 1)$  pro pravou stranu  $b_1$ , vektor  $x = (1, 0, 3)$  pro  $b_2$  a vektor  $x = (4, -1, -1)$  pro  $b_3$ .

**Cv. 2.5** Vyřešte soustavu lineárních rovnic s parametrem  $a \in \mathbb{R}$ :

$$\left( \begin{array}{cccc|c} a & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a & 1 \end{array} \right).$$

**Řešení:**

Pomocí Gaussovy eliminace převedeme matici na odstupňovaný tvar:

$$\begin{aligned} & \left( \begin{array}{cccc|c} a & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a & 1 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & a-1 & 0 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & a-1 & 1-a & 0 \\ 0 & 1-a & 1-a & 1-a^2 & 1-a \end{array} \right) \\ & \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & a-1 & 0 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & a-1 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & 1-a & 2-a-a^2 & 1-a \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & a-1 & 0 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & a-1 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3-2a-a^2 & 1-a \end{array} \right) \end{aligned}$$

Z posledního řádku upravené matice dostaneme rovnici  $(a+3)(1-a)x_4 = 1-a$ , tedy  $x_4 = \frac{1}{a+3}$  pro  $a \notin \{-3, 1\}$ . Zpětnou substitucí pak dopočítáme řešení

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left( \frac{1}{a+3}, \frac{1}{a+3}, \frac{1}{a+3}, \frac{1}{a+3} \right).$$

Pro  $a = -3$  dostaneme rovnici  $0x_4 = 4$ , soustava tudíž nemá řešení.

Pro  $a = 1$  má soustava nekonečně mnoho řešení popsaných rovnicí  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$ , tedy ve tvaru  $(1 - x_2 - x_3 - x_4, x_2, x_3, x_4)$  pro  $x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}$ .

**Cv. 2.6** Najděte soustavu 3 lineárních rovnic o 4 proměnných s řešením

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, 0, 1, 0) + x_2 \cdot (-2, 1, 0, 0) + x_4 \cdot (-3, 0, 2, 1), \text{ kde } x_2, x_4 \in \mathbb{R}.$$

**Řešení:**

Hledáme soustavu lineárních rovnic s řešením

$$\begin{aligned}(x_1, x_2, x_3, x_4) &= (1, 0, 1, 0) + x_2 \cdot (-2, 1, 0, 0) + x_4 \cdot (-3, 0, 2, 1) \\ &= (1 - 2x_2 - 3x_4, x_2, 1 + 2x_4, x_4).\end{aligned}$$

Můžeme tedy vytvořit soustavu obsahující rovnice  $x_1 = 1 - 2x_2 - 3x_4$  a  $x_3 = 1 + 2x_4$  a třetí rovnici, která množinu řešení dále neomezí, např.

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right), \quad \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 2 \end{array} \right), \quad \dots$$

**Cv. 2.7** Vyřešte soustavu lineárních rovnic  $n \times n$ :

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -1 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ -1 & \dots & -1 & 1 & 1 \end{array} \right).$$

**Řešení:**

Postupně přičteme ke každému řádku (od 2. řádku po  $n$ -tý) všechny řádky nad ním:

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -1 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ -1 & \dots & -1 & 1 & 1 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & 2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ -1 & \dots & -1 & 1 & 1 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & 2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 2^{n-1} \end{array} \right).$$

Tím převedeme matici soustavy na jednotkovou matici a na pravé straně dostaneme řešení  $x = (x_1, \dots, x_n) = (1, 2, 4, \dots, 2^{n-1})$ .