

2. Soustavy lineárních rovnic

Cv. 2.1 Zapište rozšířenou matici soustavy

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 &= 6, \\ -3x_1 + x_2 &= 2,\end{aligned}$$

a vyřešte soustavu Gaussovou–Jordanovou eliminací. Znázorněte řešení soustavy graficky jako průsečík přímek (řádkový pohled) a jako součet vektorů (sloupcový pohled).

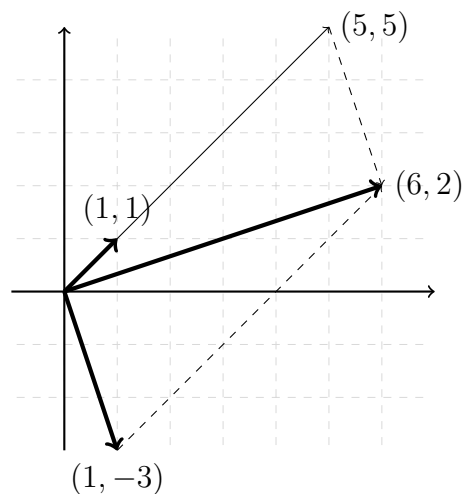
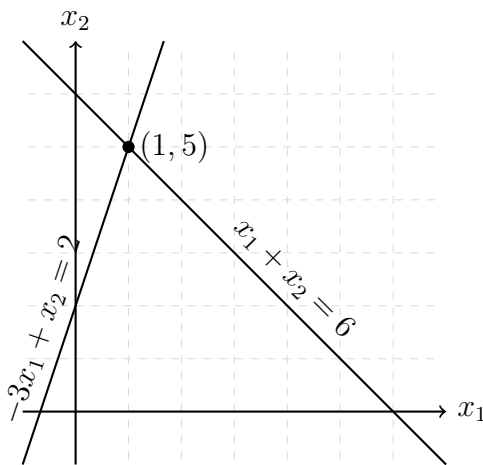
Řešení:

Rozšířená matice soustavy je

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 6 \\ -3 & 1 & 2 \end{array} \right).$$

Aplikací elementárních řádkových úprav snadno nalezneme řešení $(x_1, x_2) = (1, 5)$:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 6 \\ -3 & 1 & 2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 6 \\ 0 & 4 & 20 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 5 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{array} \right).$$



Rovnice $x_1 + x_2 = 6$ a $-3x_1 + x_2 = 2$ popisují dvě přímky v rovině, řešení soustavy $(1, 5)$ je jejich průsečíkem.

Sloupce rozšířené matice soustavy můžeme zakreslit jako vektory v rovině. Řešení soustavy pak říká, že vektor $(6, 2)$ dostaneme sečtením (1-krát prodlouženého) vektoru $(1, -3)$ a 5-krát prodlouženého vektoru $(1, 1)$.

Cv. 2.2 Vyřešte Gaussovou nebo Gaussovou–Jordanovou eliminací následující soustavy rovnic a určete hodnotu matic:

$$(a) \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 3 \end{array} \right), \quad (b) \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -3 & 6 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 3 & -1 \end{array} \right), \quad (c) \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & -1 & 7 \end{array} \right).$$

Řešení:

- (a) Aplikací elementárních řádkových úprav převedeme rozšířenou matici soustavy do odstupňovaného tvaru:

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 3 \end{array} \right) &\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 3 \\ 2 & -3 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & 5 & -10 & -10 \end{array} \right) \sim \\ &\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -20 & -30 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Zpětnou substitucí získáme jediné řešení soustavy $(x_1, x_2, x_3) = (-\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2})$. Alternativně můžeme také použít Gaussovu–Jordanovu eliminaci a převést matici do redukovaného odstupňovaného tvaru

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} \end{array} \right).$$

Hodnost matice je daná počtem nenulových řádků (počtem pivotů) odstupňovaného tvaru. V tomto případě platí $\text{rank}(A) = \text{rank}(A | b) = 3$.

- (b) Opět upravíme matici pomocí elementárních řádkových úprav:

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -3 & 6 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 3 & -1 \end{array} \right) &\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 5 & -3 & 6 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & -1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 7 & 1 & -13 \\ 0 & 7 & 1 & -7 \end{array} \right) \sim \\ &\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 7 & 1 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Poslední řádek upravené matice reprezentuje rovnici $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 5$, soustava tedy nemá řešení.

Vidíme, že se v posledním sloupci upravené matice nachází pivot a hodnost rozšířené matice soustavy je $\text{rank}(A | b) = 3$, zatímco $\text{rank}(A) = 2$.

- (c) Aplikací elementárních úprav převedeme matici na tvar:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & -1 & 7 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & -1 & 6 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right).$$

Nyní můžeme použít zpětnou substituci, nebo dále upravit matici až na redukovaný odstupňovaný tvar

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right).$$