

3. Operace s maticemi

Cv. 3.1 Spočtete $(-1)A + 2BC$, kde A, B, C jsou následující matice:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Řešení:

$$\begin{aligned} (-1) \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} (-1) \cdot 3 & (-1) \cdot 1 \\ (-1) \cdot 4 & (-1) \cdot 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 5 \cdot 1 + 9 \cdot 2 & 5 \cdot (-1) + 9 \cdot 2 \\ 2 \cdot 1 + 7 \cdot 2 & 2 \cdot (-1) + 7 \cdot 2 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 23 & 13 \\ 16 & 12 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \cdot 23 & 2 \cdot 13 \\ 2 \cdot 16 & 2 \cdot 12 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 46 & 26 \\ 32 & 24 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} -3 + 46 & -1 + 26 \\ -4 + 32 & -1 + 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 43 & 25 \\ 28 & 23 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Cv. 3.2 Vyřešte soustavy rovnic $Ax = b$ a proveďte zkoušku pomocí násobení matic.

(a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix},$

(b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$

Řešení:

(a) Řešením první soustavy rovnic $Ax = b$ je vektor $x = (1, 0)^T$. Výsledek ověříme zkouškou

$$Ax = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 3 \cdot 0 \\ 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = b.$$

(b) Řešením druhé soustavy rovnic vektor $x = (-1 - t, t, 2)^T$, kde $t \in \mathbb{R}$. Výsledek ověříme zkouškou:

$$Ax = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 - t \\ t \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot (-1 - t) + 1 \cdot t + 2 \cdot 2 \\ 1 \cdot (-1 - t) + 1 \cdot t + 1 \cdot 2 \\ 2 \cdot (-1 - t) + 2 \cdot t + 0 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = b.$$

Cv. 3.3 Vyjádřete elementární řádkové úpravy pomocí násobení matic.

Řešení:

(a) Vynásobení i -tého řádku skalárem $\alpha \neq 0$ můžeme zapsat pomocí matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Tedy vezmeme jednotkovou matici a na pozici (i, i) zaměníme 1 za α . Násobením touto maticí **zleva** násobíme i -tý řádek konstantou α .

To můžeme ověřit z definice násobení. Nechť D je libovolná matice řádu $m \times n$ a A je matice popsaná výše, řádu $m \times m$. Potom AD je také matice řádu $m \times n$ a pro libovolný řádek $j \in \{1, \dots, m\}$ a sloupec $k \in \{1, \dots, n\}$ platí:

$$\begin{aligned} (AD)_{jk} &= \sum_{\ell} A_{j\ell} D_{\ell k} \\ &= A_{jj} D_{jk} && (A_{j\ell} \neq 0 \text{ pouze pro } \ell = j) \\ &= \begin{cases} D_{jk} & \text{pro } j \neq i \\ \alpha D_{jk} & \text{pro } j = i \end{cases} && (\text{dosadíme za } A_{jj}) \end{aligned}$$

Vidíme, že AD má všechny řádky kromě i -tého shodné s maticí D a i -tý řádek je vynásoben skalárem α .

(b) Prohození i -tého a j -tého řádku. Můžeme zapsat pomocí matice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Tedy vezmeme jednotkovou matici a prohodíme její i -tý a j -tý řádek. Násobením touto maticí **zleva** prohazujeme i -tý a j -tý řádek.

Ověření zase provedeme z definice násobení. Nechť D je libovolná matice řádu $m \times n$ a B je matice popsaná výše, řádu $m \times m$. Potom BD je také matice řádu $m \times n$ a pro libovolný řádek $k \in \{1, \dots, m\}$ a sloupec $h \in \{1, \dots, n\}$ platí:

$$\begin{aligned} (BD)_{kh} &= \sum_{\ell} B_{k\ell} D_{\ell h} \\ &= \begin{cases} B_{kk} D_{kh} & \text{pro } k \neq i, j \\ B_{ki} D_{ih} & \text{pro } k = j \\ B_{kj} D_{jh} & \text{pro } k = i \end{cases} \quad (\text{pro ostatní hodnoty } \ell \text{ je } B_{k\ell} = 0) \\ &= \begin{cases} D_{kh} & \text{pro } k \neq i, j \\ D_{ih} & \text{pro } k = j \\ D_{jh} & \text{pro } k = i \end{cases} \quad (\text{dosadíme příslušné hodnoty z matice } B) \end{aligned}$$

Vidíme, že BD má všechny řádky kromě i -tého a j -tého shodné s maticí D a i -tý a j -tý řádek jsou prohozeny.

- (c) Přičtení α -násobku i -tého řádku k j -tému řádku, kde $i \neq j$. Můžeme zapsat pomocí matice

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Tedy vezmeme jednotkovou matici a na pozici (i, j) zaměníme nulu za α . Násobením touto maticí **zleva** přičítáme α -násobek j -tého řádku k i -tému. Ověření provedeme z definice násobení matic. Nechť D je libovolná matice řádu $m \times n$ a C je matice popsaná výše, řádu $m \times m$. Potom CD je také matice řádu $m \times n$ a pro libovolný řádek $k \in \{1, \dots, m\}$ a sloupec $h \in \{1, \dots, n\}$ platí:

$$\begin{aligned} (CD)_{kh} &= \sum_{\ell} C_{k\ell} D_{\ell h} \\ &= \begin{cases} C_{kk} D_{kh} & \text{pro } k \neq i \\ C_{kk} D_{kh} + C_{kj} D_{jh} & \text{pro } k = i \end{cases} \quad (\text{pro ostatní hodnoty } m \text{ je } C_{k\ell} = 0) \\ &= \begin{cases} D_{kh} & \text{pro } k \neq i \\ D_{kh} + \alpha D_{jh} & \text{pro } k = i \end{cases} \quad (\text{dosadíme příslušné hodnoty z matice } C) \end{aligned}$$

Vidíme, že všechny řádky kromě i -tého zůstaly zachovány a k i -tému řádku jsme přičetli α násobek j -tého řádku.

Cv. 3.4 Dokažte, anebo vyvraťte, zdali pro matice A, B, C a 0 stejného řádu a reálná čísla α, β platí:

- | | |
|---|--|
| (a) $A + (B + C) = (A + B) + C$ | (i) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$ |
| (b) $A + B = B + A$ | (j) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$ |
| (c) $A + 0 = A$ | (k) $\alpha A + \beta B = (\alpha + \beta)(A + B)$ |
| (d) $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$ | (l) $(A^T)^T = A$ |
| (e) $\alpha(\beta A) = \beta(\alpha A)$ | (m) $A^T A$ je symetrická |
| (f) $A + (-1)A = 0$ | (n) $(A + B)^T = A^T + B^T$ |
| (g) $1A = A$ | (o) $(\alpha A)^T = \alpha(A^T)$ |
| (h) $A(B + C) = AB + AC$ | (p) $AI_n = A$ |

Řešení:

(a) Tvrzení platí.

Prvně ukážeme, že levá i pravá strana dávají smysl a mají stejné rozměry. Matice A, B, C jsou všechny stejného řádu, označíme si jejich rozměry jako $m \times n$. Pak na levé straně sčítáme $B + C$, což jsou obě matice řádu $m \times n$ a dostáváme novou matici řádu $m \times n$. Tu přičítáme k matici A , která je rovněž řádu $m \times n$. Tedy levá strana dává smysl a výsledkem je matice řádu $m \times n$.

Obdobně pro pravou stranu dostáváme že $(A + B) + C$ dává smysl a výsledkem je vždy matice $m \times n$.

Nyní ukážeme, že se matice rovnají porovnáním po složkách. Pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ a $j \in \{1, \dots, m\}$ platí:

$$\begin{aligned}
 [A + (B + C)]_{ij} &= [A]_{ij} + [(B + C)]_{ij} \\
 &= [A]_{ij} + ([B]_{ij} + [C]_{ij}) \\
 &= ([A]_{ij} + [B]_{ij}) + [C]_{ij} && \text{(asociativita sčítání v } \mathbb{R} \text{)} \\
 &= [(A + B)]_{ij} + [C]_{ij} \\
 &= [(A + B) + C]_{ij}.
 \end{aligned}$$

(b) Tvrzení platí.

Podobně jako v předchozím příkladě. Nejprve ukážeme, že obě strany dávají pro všechny uvažované matice A, B smysl a výsledky mají shodné rozměry. Poté ukazujeme rovnost po složkách, tedy pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ a $j \in \{1, \dots, m\}$:

$$\begin{aligned}
 [A + B]_{ij} &= [A]_{ij} + [B]_{ij} \\
 &= [B]_{ij} + [A]_{ij} && \text{(komutativita sčítání v } \mathbb{R} \text{)} \\
 &= [B + A]_{ij}
 \end{aligned}$$

- (c) Tvrzení platí. Důkaz ponecháváme na čtenáři.
- (d) Tvrzení platí. Důkaz ponecháváme na čtenáři.
- (e) Tvrzení platí. Důkaz ponecháváme na čtenáři.
- (f) Tvrzení platí. Důkaz ponecháváme na čtenáři.
- (g) Tvrzení platí. Důkaz ponecháváme na čtenáři.
- (h) Tvrzení platí. Důkaz ponecháváme na čtenáři.
- (i) Tvrzení platí. Důkaz ponecháváme na čtenáři.
- (j) Tvrzení platí. Důkaz ponecháváme na čtenáři.
- (k) Tvrzení neplatí.

Ukážeme pomocí protipříkladu. Najdeme α, β, A, B , která splňují zadání, ale pro něž tvrzení neplatí. Například

$$\alpha = 2, \beta = 3, A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ a } B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dostáváme

$$\alpha A + \beta B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = (\alpha + \beta)(A + B).$$

- (l) Tvrzení platí.

Je-li A matice řádu $m \times n$, pak A^T je matice řádu $n \times m$ a $(A^T)^T$ je opět matice řádu $m \times n$. Tedy matice na pravé i levé straně mají shodné rozměry. Poté dokazujeme rovnost po složkách, pro všechny $i \in \{1, \dots, m\}$ a $j \in \{1, \dots, n\}$.

$$[(A^T)^T]_{ij} = [A^T]_{ji} = [A]_{ij}$$

- (m) Tvrzení platí.

Matice D je symetrická, pokud platí $D = D^T$. Prvně si uvědomme, že pokud matice A je rozměrů $m \times n$, pak matice A^T je rozměru $n \times m$. Násobení matic $A^T A$ tedy dává smysl a jeho výsledkem je matice rozměru $n \times n$.

Dále dle věty o vlastnostech transpozice víme, že pro všechny matice D, E vhodných rozměrů (takových aby šly vynásobit) platí $(DE)^T = E^T D^T$. Proto dostáváme:

$$\begin{aligned} (A^T A)^T &= A^T (A^T)^T && \text{(dle } (DE)^T = E^T D^T \text{)} \\ &= A^T A. && \text{(předchozí tvrzení)} \end{aligned}$$

- (n) Tvrzení platí. Důkaz ponecháváme na čtenáři.
- (o) Tvrzení platí. Důkaz ponecháváme na čtenáři.
- (p) Tvrzení platí pouze pokud A je matice řádu $m \times n$ pro nějaké m a n shodující se s I_n . Jinak levá strana nedává smysl.

Cv. 3.5 Pro libovolnou nesymetrickou čtvercovou matici A zkonstruujte symetrickou matici B tak, že jejich součin nekomutuje, tj. $AB \neq BA$.

Komutuje součin matic, pokud jsou obě matice symetrické?

Řešení:

Pro první část můžeme vybrat například matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pak

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Tvrzení neplatí ani pokud jsou obě matice symetrické. Volíme například matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dostáváme:

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 5 \\ 5 & 3 & 6 \end{pmatrix} \neq \\ &\neq \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} = BA. \end{aligned}$$

Cv. 3.6 Dokažte nebo vyvráťte:

(a) Nechť $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Pokud A je symetrická a komutuje s B , pak A komutuje s B^T .

(b) Nechť $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Pokud A komutuje s B , pak A komutuje s B^T .

Řešení:

(a) Tvrzení platí, $AB^T = A^T B^T = (BA)^T = (AB)^T = B^T A^T = B^T A$.

(b) Tvrzení neplatí, například pro matice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$