3. Operace s maticemi

Cv. 3.1 Spočtěte $(-1)A + 2BC$, kde A, B, C jsou následující matice:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Řešení:

$$\begin{aligned}
(-1)\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 2 & 7 \\ \dots \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}& \\
&= \begin{pmatrix} (-1)\cdot 3 & (-1)\cdot 1 \\ (-1)\cdot 4 & (-1)\cdot 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 5\cdot 1 + 9\cdot 2 & 5\cdot(-1) + 9\cdot 2 \\ 2\cdot 1 + 7\cdot 2 & 2\cdot(-1) + 7\cdot 2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 23 & 13 \\ 16 & 12 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\cdot 23 & 2\cdot 13 \\ 2\cdot 16 & 2\cdot 12 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 46 & 26 \\ 32 & 24 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -3+46 & -1+26 \\ -4+32 & -1+24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 43 & 25 \\ 28 & 23 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Cv. 3.2 Vyřešte soustavy rovnic $Ax = b$ a proveďte zkoušku pomocí násobení matic.

(a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$,

(b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Řešení:

(a) Řešením první soustavy rovnic $Ax = b$ je vektor $x = (1, 0)^T$. Výsledek ověříme zkouškou

$$Ax = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 1 + 3\cdot 0 \\ 1\cdot 1 + 2\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = b.$$

(b) Řešením druhé soustavy rovnic vektor $x = (-1 - t, t, 2)^T$, kde $t \in \mathbb{R}$. Výsledek ověříme zkouškou:

$$Ax = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1-t \\ t \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot(-1-t) + 1\cdot t + 2\cdot 2 \\ 1\cdot(-1-t) + 1\cdot t + 1\cdot 2 \\ 2\cdot(-1-t) + 2\cdot t + 0\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = b.$$

Cv. 3.3 Vyjádřete elementární řádkové úpravy pomocí násobení matic.

Řešení:

(a) Vynásobení i-tého řádku skalárem $\alpha \neq 0$ můžeme zapsat pomocí matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Tedy vezmeme jednotkovou matici a na pozici (i, i) zaměníme 1 za α. Násobením touto maticí **zleva** násobíme i-tý řádek konstantou α.
To můžeme ověřit z definice násobení. Nechť D je libovolná matice řádu $m \times n$ a A je matice popsaná výše, řádu $m \times m$. Potom AD je také matice řádu $m \times n$ a pro libovolný řádek $j \in \{1, \dots, m\}$ a sloupec $k \in \{1, \dots, n\}$ platí:

$$\begin{aligned} (AD)_{jk} &= \sum_{\ell} A_{j\ell} D_{\ell k} \\ &= A_{jj} D_{jk} && (A_{j\ell} \neq 0 \text{ pouze pro } \ell = j) \\ &= \begin{cases} D_{jk} & \text{pro } j \neq i \\ \alpha D_{jk} & \text{pro } j = i \end{cases} && (\text{dosadíme za } A_{jj}) \end{aligned}$$

Vidíme, že AD má všechny řádky kromě i-tého shodné s maticí D a i-tý řádek je vynásoben skalárem α.

(b) Prohození i-tého a j-tého řádku. Můžeme zapsat pomocí matice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Tedy vezmeme jednotkovou matici a prohodíme její i-tý a j-tý řádek. Násobením touto maticí **zleva** prohazujeme i-tý a j-tý řádek.

Ověření zase provedeme z definice násobení. Nechť D je libovolná matice řádu $m \times n$ a B je matice popsaná výše, řádu $m \times m$. Potom BD je také matice řádu $m \times n$ a pro libovolný řádek $k \in \{1, \dots, m\}$ a sloupec $h \in \{1, \dots, n\}$ platí:

$$\begin{aligned}
(BD)_{kh} &= \sum_{\ell} B_{k\ell} D_{\ell h} \\
&= \begin{cases} B_{kk} D_{kh} & \text{pro } k \neq i, j \\ B_{ki} D_{ih} & \text{pro } k = j \\ B_{kj} D_{jh} & \text{pro } k = i \end{cases} && \text{(pro ostatní hodnoty } \ell \text{ je } B_{k\ell} = 0) \\
&= \begin{cases} D_{kh} & \text{pro } k \neq i, j \\ D_{ih} & \text{pro } k = j \\ D_{jh} & \text{pro } k = i \end{cases} && \text{(dosadíme příslušné hodnoty z matice } B)
\end{aligned}$$

Vidíme, že BD má všechny řádky kromě i-tého a j-tého shodné s maticí D a i-tý a j-tý řádek jsou prohozeny.

(c) Přičtení α-násobku i-tého řádku k j-tému řádku, kde $i \neq j$. Můžeme zapsat pomocí matice

$$C = \begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1
\end{pmatrix}.$$

Tedy vezmeme jednotkovou matici a na pozici (i, j) zaměníme nulu za α. Násobením touto maticí **zleva** přičítáme α-násobek j-tého řádku k i-tému.

Ověření provedeme z definice násobení matic. Nechť D je libovolná matice řádu $m \times n$ a C je matice popsaná výše, řádu $m \times m$. Potom CD je také matice řádu $m \times n$ a pro libovolný řádek $k \in \{1, \dots, m\}$ a sloupec $h \in \{1, \dots, n\}$ platí:

$$\begin{aligned}
(CD)_{kh} &= \sum_{\ell} C_{k\ell} D_{\ell h} \\
&= \begin{cases} C_{kk} D_{kh} & \text{pro } k \neq i \\ C_{kk} D_{kh} + C_{kj} D_{jh} & \text{pro } k = i \end{cases} && \text{(pro ostatní hodnoty } m \text{ je } C_{k\ell} = 0) \\
&= \begin{cases} D_{kh} & \text{pro } k \neq i \\ D_{kh} + \alpha D_{jh} & \text{pro } k = i \end{cases} && \text{(dosadíme příslušné hodnoty z matice } C)
\end{aligned}$$