7. Vektorové prostory a podprostory, lineární obal

Cv. 7.1 Rozhodněte, pro která $a \in \mathbb{Z}_7$ tvoří množina

$$S_a = \{(x, y, z)^T : x + 2y - 3z = a\}$$

vektorový podprostor $\mathbb{Z}_7^3$. Kolik má tento vektorový podprostor prvků?

Řešení:
Pokud S_a má být vektorový podprostor $\mathbb{Z}_7^3$, tak musí obsahovat nulový vektor, tedy $(0, 0, 0)^T$. Vidíme tedy, že musí platit $a = 0 + 2 \cdot 0 - 3 \cdot 0 = 0$. Dále tedy předpokládejme, že $a = 0$. Dokažme nyní, že v takovém případě o vektorový podprostor jde. K tomu stačí ověřit uzavřenost na násobky prvky ze $\mathbb{Z}_7$ a na sčítání vektorů.

Uzavřenost na násobky Je-li $(x, y, z) \in S_0$ a $\alpha \in \mathbb{Z}_7$, tak $\alpha x + 2\alpha y - 3\alpha z = \alpha(x + 2y - 3z) = \alpha \cdot 0 = 0$, a tedy i $\alpha(x, y, z) = (\alpha x, \alpha y, \alpha z) \in S_0$.

Uzavřenost na sčítání Pro $(x, y, z) \in S_0$ a $(x', y', z') \in S_0$, díky distributivitě, komutativitě a asociativitě sčítání v $\mathbb{Z}_7$ platí $(x+x')+2(y+y')-3(z+z') = (x+2y-3z)+(x'+2y'-3z) = 0+0 = 0$, a tedy i $(x+x', y+y', z+z') \in S_0$.

Nyní spočteme počet prvků S_0. Pro libovolnou volbu x a y dostáváme právě jeden prvek z (totiž $\frac{x+2y}{3} = 5x + 3y$), který splňuje $x + 2y - 3z = 0$. Jelikož máme 7 možností pro x a 7 možností pro y, podprostor S_0 má celkem $7 \cdot 7 = 49$ prvků.

Závěr: O vektorový prostor se jedná pouze pro $a = 0$, v kterémžto případě má tento prostor 49 prvků.

Cv. 7.2 Nad $\mathbb{Z}_{11}$ určete průnik řešení soustavy rovnic $Ax = 0$ a lineárního obalu množiny vektorů $\{v_1, v_2, v_3\}$, přičemž

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \ v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Řešení:
Nejprve vyřešíme danou soustavu rovnic.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -7 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -7 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 7 & 5 \end{pmatrix}.$$

Množina všech řešení tedy vychází $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; r, s \in \mathbb{Z}_{11} \right\}$.

Musíme zjistit, které z těchto vektorů se dají vyjádřit jako $a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3$, kde $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{Z}_{11}$. Označíme-li $w_1 := (8, 6, 0, 1)^T$ a $w_2 = (0, 4, 1, 0)^T$, máme vlastně vyřešit rovnici $a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 = rw_1 + sw_2$, neboli $a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 + r(-w_1) + s(-w_2) = 0$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -8 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & -6 & -4 \\ 1 & 3 & 9 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

z čehož vidíme, že $r = 0$ a $s = 0$, neboli jediným vektorem v průniku je $0 \cdot w_1 + 0 \cdot w_2$, čili nulový vektor.

Cv. 7.4 Nad $\mathbb{Z}_7$ určete, kolik prvků má následující průnik lineárních obalů

$$\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}\right\} \bigcap \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}.$$

Řešení:

Označme dané vektory v_1, v_2, v_3 a w_1, w_2, w_3. Nyní stačí vyřešit rovnici $xv_1 + yv_2 + zv_3 = rw_1 + sw_2 + tw_3$, podívat se, jaké možné kombinace hodnot r, s, t vyšly a těmi přenásobit w_1, w_2, w_3. (Pokud by dané vektory byly lineárně závislé, mohlo by se stát, že více řešení dá ten samý vektor.) Odpověď: 49.