

13. Obraz, jádro, isomorfismus

Cv. 13.1 Rozhodněte, zda zobrazení $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dané předpisem

$$f(x, y, z) = (x + y - 2z, y - z, x - y)^T$$

je isomorfismem \mathbb{R}^3 na sebe sama (takzvaným automorfismem).

Cv. 13.2 Mějme lineární zobrazení $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zadané obrazem báze B :

$$f(2, 1, 1) = (1, 2, 3)^T,$$

$$f(1, 3, 5) = (3, 2, 1)^T,$$

$$f(7, 1, 4) = (1, 1, 1)^T.$$

Zjistěte, jestli je zobrazení prosté (pokud není, najděte vektory $u, v \in \mathbb{R}^3$ takové, že $u \neq v \wedge f(u) = f(v)$) a jestli je „na“ (pokud ne, najděte vektor, který nemá předobraz, tedy $u \in \mathbb{R}^3$ takové že $\forall v \in \mathbb{R}^3: f(v) \neq u$). Určete dimenzi a bázi obrazu a jádra tohoto lineárního zobrazení.

Cv. 13.3 Necht' $f: U \rightarrow V, g: V \rightarrow W$ jsou isomorfismy vektorových prostorů. Dokažte, že $g \circ f: U \rightarrow W$ je také isomorfismus vektorových prostorů (tedy že isomorfismus je ekvivalence). Speciálně ukažte, že:

(a) Jsou-li f, g prostá, pak $g \circ f$ je prosté.

(b) Jsou-li f, g „na“, pak $g \circ f$ je „na“.

Cv. 13.4 Rozhodněte, jestli jsou následující dvojice vektorových prostorů isomorfní:

(a) $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ a \mathbb{R}^4 ,

(b) \mathbb{R}^4 a \mathcal{P}^3 (prostor reálných polynomů stupně nejvýš tři),

(c) $\mathbb{R}^{m \times n}$ a $\mathbb{R}^{n \times m}$,

(d) \mathbb{R}^n nad \mathbb{R} a \mathbb{C}^n nad \mathbb{C} ,

(e) \mathbb{R}^2 a $\{x \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 = x_3 + x_4 = 0\}$,

(f) prostor všech reálných polynomů a prostor všech reálných posloupností,

(g) \mathbb{R}^4 a lineární zobrazení $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$.

Cv. 13.5 Pro lineární zobrazení $f: \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}$ dané předpisem $A \mapsto (A - A^T)$ rozhodněte které vektory patří do jádra a které do obrazu:

(a) I_2 ,

(b) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$,

(d) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Cv. 13.6 Uvažujme lineární zobrazení $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Označme lineární zobrazení $f^1 = f$, $f^2 = f \circ f$, $f^n = f \circ f^{n-1}$. Ukažte, že $\text{Ker}(f^n) \subseteq \text{Ker}(f^{n+1})$.

Cv. 13.7 Rozhodněte, zda lineární zobrazení je prosté a zda je „na“:

(a) $f: \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^3$ dané předpisem $f \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a + b + c, a + b, a)^T$,

(b) $f: \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^4$ dané předpisem $f \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a + b + c + d, a + b + c, a + b, a)^T$,

(c) $f: \mathcal{P}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ dané předpisem $f(ax^2 + bx + c) = (a + b, 2b - c, a - b + c, a + b)^T$,

(d) $f: \mathcal{P}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dané předpisem $f(ax^2 + bx + c) = (a + b, 2b - c, a - b + c)^T$,

(e) $f: \mathcal{P}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dané předpisem $f(ax^2 + bx + c) = (a + b, 2b - c, a - b + 2c)^T$.

Cv. 13.8 Ukažte, že pro (každé dvě) matice $A \in \mathbb{R}^{m \times p}$, $B \in \mathbb{R}^{p \times n}$ platí

$$\dim(\text{Ker}(A) \cap \mathcal{S}(B)) = \text{rank}(B) - \text{rank}(AB).$$