Obraz a jádro lineárního zobrazení, Isomorfismus

Úkol 11.1. Lineární zobrazení *merry*: $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ je dáno předpisem

$$\mathit{merry}(x, m, a, s) = \begin{pmatrix} x + 2m + s & m - 2a \\ x + 4a + s & m \end{pmatrix}.$$

(a) Určete bázi jádra a obrazu zobrazení *merry*. [4 b]

(b) Rozhodněte, zda je zobrazení *merry* prosté a „na“. [2 b]

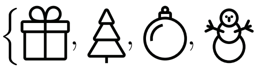
Úkol 11.2. Najděte isomorfismus $f: U \to V$ mezi vektorovými prostory U a V nad $\mathbb{R}$ (s klasickým sčítáním a násobením), kde

$$U = \left\{ (v_1, v_2, v_3, v_4)^T \in \mathbb{R}^4 \mid 1v_1 + 2v_2 + 3v_3 + 4v_4 = 0 \right\},$$
$$V = \left\{ A \in \mathbb{R}^{2\times 2} \mid A^T = A \right\},$$

a dokažte, že nalezené zobrazení f je isomorfismem. [4 b]

Bonusové příklady

Úkol 11.3. Definujte (tabulkou) operace $+$ a $\cdot$ na množině 4 prvků

$T = \{$  $\}$

tak, aby trojice $(T, +, \cdot)$ tvořila těleso. [5 b]

Úkol 11.4. Rozhodněte, zda tvoří vektorový prostor množina kladných reálných čísel $\mathbb{R}^+$ nad tělesem $\mathbb{Q}$ s operacemi $\oplus: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ a $\star: \mathbb{Q} \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, kde

$$x \oplus y = x \cdot y, \qquad \alpha \star x = x^{\alpha}.$$ [5 b]