5. Grupy a tělesa

Grupy

Cv. 5.1 Zjistěte, zda je (Abelovou) grupou:

(a) $(\mathbb{Q}, +)$,
(b) $(\mathbb{Q}, -)$,
(c) $(\mathbb{Q}, \cdot)$,
(d) $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \circ)$, kde $a \circ b = |ab|$ pro všechna $a, b \in \mathbb{Q}$,
(e) $(\mathbb{Q}, \circ)$, kde $a \circ b = \frac{a+b}{2}$ pro všechna $a, b \in \mathbb{Q}$,
(f) $(\mathbb{Q}, \circ)$, kde $a \circ b = a + b + 3$ pro všechna $a, b \in \mathbb{Q}$,
(g) $(\mathcal{F}, +)$, tj. množina $\mathcal{F}$ všech reálných funkcí jedné proměnné s operací sčítání funkcí,
(h) množina rotací v $\mathbb{R}^2$ kolem počátku s operací skládání zobrazení,
(i) množina posunutí v $\mathbb{R}^2$ s operací skládání zobrazení.

Cv. 5.2 Vyplňte tabulku pro binární operaci $\circ$ na G tak aby $(G, \circ)$ byla grupou s neutrálním prvkem 0. Výsledek zdůvodněte.

(a)

$\circ$	0	1
0		
1		

(b)

$\circ$	0	1	2
0			
1			
2			

(c)

$\circ$	0
0	

(d)

$\circ$	0	1	2	3
0				
1		0		
2				
3				

Cv. 5.3 Rozhodněte a zdůvodněte, zda je Abelovou grupou množina

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ; z \in \mathbb{Z} \right\} \text{ s maticovým součinem.}$$

Cv. 5.4 Mějme grupu $(G, \circ)$ s neutrálním prvkem e a inverze k prvku a nechť je a^{-1}. Proveďte:

(a) najděte e^{-1},
(b) upravte $(a \circ b)^{-1}$.

Cv. 5.5 Najděte různé příklady podgrup grupy matic $(\mathbb{R}^{n \times n}, +)$.

6. Permutace

Cv. 6.1 Mějme permutace

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 6 & 5 \end{pmatrix}, \quad q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 2 & 5 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

Najděte jejich cykly, znaménka, inverze a složte permutace p, q mezi sebou v obou pořadích.

Cv. 6.2 Mějme permutaci

$$p = (1, 3, 4)(2, 5)(6, 11, 10, 9, 8, 7).$$

Spočítejte permutace p^9 a p^{-14}.

Pro jakou nejmenší mocninu $k \geq 1$ dostaneme $p^k = id$?

Cv. 6.3 Rozložte permutaci $(1, 2, 3, 4, 5)$ na složení transpozic, a to alespoň dvěma různými způsoby. Jaký je nejmenší možný počet transpozic, které k rozkladu potřebujeme?

Cv. 6.4 Dokažte, že každou permutaci $p \in S_n$ lze složit pomocí nanejvýš $n-1$ transpozic.

Obecně, permutace $p \in S_n$ se skládá z k cyklů. Pomocí kolika transpozic se dá složit? Najděte všechny možnosti.

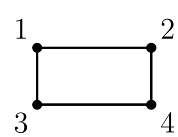
Cv. 6.5 Určete znaménko permutace r zadané tabulkou:

$$r = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ n & n-1 & n-2 & \dots & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Cv. 6.6 Najděte všechny permutace splňující $p \in S_{10}$ a $p^2 = (1, 3)(2, 4)(7, 8, 9, 10)$.

Cv. 6.7 Dokažte, že složením permutací dostaneme permutaci.

Cv. 6.8 Najděte všechny symetrie obdélníku, popište je permutacemi a ověřte, že tvoří podgrupu grupy $(S_4, \circ)$.



Cv. 6.9 Najděte všechny symetrie čtverce, popište je permutacemi a ověřte, že tvoří podgrupu grupy $(S_4, \circ)$.