

5. Grupy a tělesa

Grupy

Cv. 5.1 Zjistěte, zda je (Abelovou) grupou:

- (a) $(\mathbb{Q}, +)$,
- (b) $(\mathbb{Q}, -)$,
- (c) (\mathbb{Q}, \cdot) ,
- (d) $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \circ)$, kde $a \circ b = |ab|$ pro všechna $a, b \in \mathbb{Q}$,
- (e) (\mathbb{Q}, \circ) , kde $a \circ b = \frac{a+b}{2}$ pro všechna $a, b \in \mathbb{Q}$,
- (f) (\mathbb{Q}, \circ) , kde $a \circ b = a + b + 3$ pro všechna $a, b \in \mathbb{Q}$,
- (g) $(\mathcal{F}, +)$, tj. množina \mathcal{F} všech reálných funkcí jedné proměnné s operací sčítání funkcí,
- (h) množina rotací v \mathbb{R}^2 kolem počátku s operací skládání zobrazení,
- (i) množina posunutí v \mathbb{R}^2 s operací skládání zobrazení.

Cv. 5.2 Vyplňte tabulku pro binární operaci \circ na G tak aby (G, \circ) byla grupou s neutrálním prvkem 0. Výsledek zdůvodněte.

(a)

\circ	0	1
0		
1		

(b)

\circ	0	1	2
0			
1			
2			

(c)

\circ	0
0	

(d)

\circ	0	1	2	3
0				
1		0		
2				
3				

Cv. 5.3 Rozhodněte a zdůvodněte, zda je Abelovou grupou množina

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; z \in \mathbb{Z} \right\} \text{ s maticovým součinem.}$$

Cv. 5.4 Mějme grupu (G, \circ) s neutrálním prvkem e a inverze k prvku a nechť je a^{-1} . Provedte:

- (a) najděte e^{-1} ,
- (b) upravte $(a \circ b)^{-1}$.

Cv. 5.5 Najděte různé příklady podgrup grupy matic $(\mathbb{R}^{n \times n}, +)$.

Konečná tělesa \mathbb{Z}_p

Cv. 5.6 Vyjádřete jako prvky daného tělesa výrazy:

- (a) $((2^{-1} + 1)4)^{-1}$ a $4/3$ v tělese \mathbb{Z}_5 ,
- (b) $6 + 7$, -7 , $6 \cdot 7$, 7^{-1} a $6/7$ v tělese \mathbb{Z}_{11} .

Cv. 5.7 Nad \mathbb{Z}_5 najděte množinu všech řešení soustavy rovnic

$$\begin{aligned}3x + 2y + z &= 1, \\4x + y + 3z &= 3\end{aligned}$$

a spočítejte její mohutnost.

Cv. 5.8 V \mathbb{Z}_7 spočítejte mocninu matice A^{100} pro matici $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Cv. 5.9 Spočítejte 20^{3332} v tělese \mathbb{Z}_{31} .