# 7. Vektorové prostory a podprostory, lineární obal

## Vektorové prostory a podprostory

**Cv. 7.1** Rozhodněte, zda tvoří vektorový prostor:

(a) $\mathbb{Z}_p^n$ nad $\mathbb{Z}_p$,

(b) $\mathbb{R}^n$ nad $\mathbb{Q}$,

(c) $\mathbb{Q}^n$ nad $\mathbb{R}$,

(d) $\mathbb{R}^n$ nad $\mathbb{R}$ s operacemi $x \oplus y = x + y$, $\alpha \odot x = -\alpha \cdot x$,

(e) $\mathbb{R}^n$ nad $\mathbb{R}$ s operacemi $x \oplus y = x + y$, $\alpha \odot x = |\alpha| \cdot x$,

(f) $U \times V$ nad $\mathbb{T}$, kde $U, V$ jsou vektorové prostory nad $\mathbb{T}$, sčítání a násobení je definováno standardně po složkách.

(g) množina všech zobrazení $f\colon M \to V$ nad tělesem $\mathbb{T}$, kde $M$ je daná množina a $V$ vektorový prostor nad $\mathbb{T}$.

***Řešení:***

(a) Jedná se o vektorový prostor, protože

- $(\mathbb{Z}_p^n, +_{\text{ mod } p})$ je Abelova grupa,
- modulární násobení je asociativní,
- roli neutrálního prvku pro modulární násobení zastává $1 \in \mathbb{Z}_p^n$,
- modulární aritmetika je distributivní.

(b) Jedná se o vektorový prostor, protože $\mathbb{R}^n$ nad $\mathbb{Q}$ má pro operace sčítání a násobení skalárem stejná vlastnosti jako vektorový prostor $\mathbb{R}^n$ nad $\mathbb{R}$. Potenciálně jediný problém by mohl být použití jiného tělesa, protože bychom mohli při násobení skalárem dostat vektory mimo $\mathbb{R}^n$. Protože $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$, tento problém nenastane.

(c) Narozdíl od předchozího případu zde už problém nastane. Nejedná se o vektorový prostor, protože při násobení vektoru skalárem se nejedná o operaci $\mathbb{R} \times \mathbb{Q}^n \to \mathbb{Q}^n$; můžeme dostat ve vektoru reálné složky. Není splněna uzavřenost množiny na danou operaci.

(d) Není vektorový prostor, protože neplatí asociativita násobení:

$$\alpha \odot (\beta \odot v) = \alpha \odot (-\beta v) = \alpha\beta v \neq -\alpha\beta v = (\alpha\beta) \odot v.$$

Jako konkrétní protipříklad stačí vzít $\alpha = \beta = 1$ a $v = (1,1)^T$.

(e) Není vektorový prostor, protože neplatí distributivita. Pro jakékoli $\beta = -\alpha \neq 0$ dostáváme

$$(\alpha + \beta) \odot v = |0|v = 0 \neq 2|\alpha|v = |\alpha|v + |-\alpha|v = \alpha \odot v + \beta \odot v.$$

Konkrétně například stačí vzít $\alpha = 1$, $\beta = -1$, $v = (1,1)^T$.

(f) Prvky množiny $U \times V$ jsou uspořádané dvojice $(u, v)$, kde $u \in U$, $v \in V$. Pro $(u, v), (u', v') \in U \times V$ je součet definován takto: $(u, v) + (u', v') = (u + u', v + v')$. Násobek je definován analogicky $\alpha(u, v) = (\alpha u', \alpha v)$, kde $\alpha \in \mathbb{T}$ a $(u, v) \in U \times V$.

Vlastnosti operací $U \times V$ nad $\mathbb{T}$ plynou z vlastností operací pro jednotlivé prostory $U$ a $V$, takže se jedná vektorový prostor.

(g) Pokud není uvedeno jinak, uvažujeme přirozené definice operací sčítání a násobení funkcí, tedy

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad (\alpha f)(x) = f(x).$$

Následně o dvou funkcích řekneme, že se rovnají, pokud se rovnají jejich funkční hodnoty na všech $x \in M$. Daná struktura je vektorový prostor, protože platí

i. asociativita sčítání

$$((f + g) + h)(x) = (f + g)(x) + h(x) = f(x) + g(x) + h(x),$$

$$(f + (g + h))(x) = f(x) + (g + h)(x) = f(x) + g(x) + h(x),$$

ii. neutrální prvek pro sčítání je funkce $e(x) = o$, kde $o$ je nulový vektor prostoru $V$,

iii. inverzní prvek $f^{-1}$ k funkci $f$ je $f^{-1}(x) = -1 \cdot f(x)$,

iv. komutativita sčítání

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = g(x) + f(x) = (g + f)(x),$$

v. asociativita násobení skalárem

$$(\alpha(\beta f))(x) = \alpha(\beta f)(x) = \alpha\beta f(x) = (\alpha\beta) f(x) = ((\alpha\beta) f)(x),$$

vi. neutrální prvek pro násobení skalárem je $1 \in \mathbb{T}$,

vii. distributivita

$$((\alpha + \beta) f)(x) = (\alpha + \beta) f(x) = \alpha f(x) + \beta f(x) = (\alpha f)(x) + (\beta f)(x),$$

viii. distributivita

$$\begin{aligned}(\alpha(f + g))(x) &= \alpha(f + g)(x) = \alpha(f(x) + g(x)) = \\ &= \alpha f(x) + \alpha g(x) = (\alpha f)(x) + (\alpha g)(x).\end{aligned}$$

**Cv. 7.2** Najděte netriviální podmnožinu $\mathbb{R}^2$, která je:

(a) uzavřená na sčítání a odčítání, ale ne na násobky,

(b) uzavřená na násobky, ale ne na sčítání.

***Řešení:***

(a) Např. množina $\{(i, i)^T \mid i \in \mathbb{Z}\}$.

(b) Např. sjednocení dvojice různoběžných přímek procházejících počátkem.

**Cv. 7.3** Rozhodněte, zda následující množiny vektorů tvoří podprostor $\mathbb{R}^2$:

(a) $\{(s, 5s)^T;\ s \in \mathbb{R}\}$,
(b) $\{(s+t, 1)^T;\ s, t \in \mathbb{R}\}$,
(c) $\{(s, s^2)^T;\ s \in \mathbb{R}\}$,
(d) $\{(s-t, 2t)^T;\ s, t \in \mathbb{R}\}$.

***Řešení:***
Aby množina tvořila podprostor $\mathbb{R}^2$, je třeba, aby obsahovala $(0,0)^T$ a byla uzavřená na operace sčítání a násobení skalárem.

(a) Nulový vektor v množině pro $s = 0$ leží. Uzavřenost na součty a součiny také platí:
- $(s, 5s)^T + (t, 5t)^T = (s+t, 5(s+t))^T$,
- $\alpha(s, 5s)^T = (\alpha s, 5\alpha s)^T$.

Jedná se tedy o vektorový podprostor prostoru $\mathbb{R}^2$.

(b) Není podprostorem, neboť $(0,0)^T$ není součástí množiny.

(c) Není podprostorem, neboť množina není uzavřena ani na násobky, ani na součty. Například vektor $(1,1)^T$ leží v množině, ale její násobek $(2,2)^T$ už nikoli.

(d) Nulový vektor v množina pro $t = 0$, $s = 0$ leží. Uzavřenost na součty a součiny také platí:
- $(a-b, 2b)^T + (c-d, 2d)^T = ((a+c)-(b+d), 2(b+d))^T$,
- $\alpha(t-s, 2s)^T = (\alpha t - \alpha s, 2\alpha s)^T$.

**Cv. 7.4** Buď $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Dokažte, že $\{x \in \mathbb{R}^n;\ Ax = 0\}$ tvoří vektorový podprostor $\mathbb{R}^n$.

***Řešení:***
Aby množina tvořila podprostor, musí obsahovat nulový vektor a být uzavřená na operace sčítání a násobení skalárem.

Pokud dosadíme do soustavy rovnic vektor $x = (0, \dots, 0)^T$, dostáváme na levé straně soustavy nuly, tedy nulový vektor je řešením libovolné soustavy rovnic s nulovou pravou stranou.

Uzavřenost na násobky. Pokud $x \in \mathbb{R}^n$ splňuje $Ax = 0$, po dosazení $\alpha x$, kde $\alpha \in \mathbb{R}$ je libovolné, dostáváme

$$A(\alpha x) = \alpha(Ax) = \alpha 0 = 0.$$

Obdobně pro součty. Pro libovolné $x, y \in \mathbb{R}^n$ splňující soustavu rovnic platí $Ax = Ay = 0$. Tudíž

$$A(x+y) = Ax + Ay = 0 + 0 = 0.$$

**Cv. 7.5** Nalezněte vlastní příklady podprostorů prostoru matic $\mathbb{R}^{n\times n}$ nad $\mathbb{R}$.

***Řešení:***

- Triviální příklady jsou celý prostor $\mathbb{R}^{n\times n}$ nad $\mathbb{R}$, nebo množina $\{0_{n\times n}\}$.
- Netriviálním příkladem jsou poté horní (nebo dolní) trojúhelníkové matice, neboť násobení skalárem, ani součet dvou matic nezmění nulovost prvků pod diagonálou.
- Z podobného důvodu tvoří podprostor diagonální matice.
- Obecněji bychom mohli vzít libovolnou podmnožinu matic, kde určité členy zafixujeme rovny 0 a zbytek členů bude nabývat libovolných hodnot.
- Jiným příkladem jsou magické čtverce (tj. matice u nichž součet libovolného řádku, sloupce i obou diagonál dá stejné číslo).

**Cv. 7.6** Rozhodněte, zda následující tvoří podprostor prostoru reálných posloupností $\mathbb{R}^\infty = \{(x_1, x_2, \dots);\ x_i \in \mathbb{R},\ i \in \mathbb{N}\}$:

(a) posloupnosti s nekonečně mnoha nulami,
(b) posloupnosti s konečně mnoha nenulami,
(c) monotónní posloupnosti (neklesající a nerostoucí posloupnosti čísel),
(d) fibonacciovské posloupnosti (splňující $x_{i+1} = x_i + x_{i-1}$, kde $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ jsou libovolné).

***Řešení:***

(a) Ne, nejsou uzavřené na součet.
Například $(0,1,0,1,\dots) + (1,0,1,0,\dots) = (1,1,1,1,\dots)$
(b) Ano, snadno nahlédneme.
(c) Ne, nejsou uzavřené na součty.
Například $(1,0,0,0,\dots) + (0,0,1,1,\dots) = (1,0,1,\dots)$.
(d) Ano, snadno nahlédneme.

## Lineární obal, lineární kombinace

**Cv. 7.7** Buď $V$ vektorový prostor a $M, N \subseteq V$ množiny vektorů. Rozhodněte, zda platí

(a) $\mathrm{span}(\mathrm{span}(M)) = \mathrm{span}(M)$,
(b) $M \subseteq N \;\Rightarrow\; \mathrm{span}(M) \Subset \mathrm{span}(N)$,
(c) $M \subseteq N \;\Leftarrow\; \mathrm{span}(M) \Subset \mathrm{span}(N)$,
(d) $\mathrm{span}(M \cap N) = \mathrm{span}(M) \cap \mathrm{span}(N)$,

***Řešení:***

Ukážeme dva možné způsoby řešení, podle toho, jakou charakterizaci lineárního obalu použijeme.

*První způsob.* Podle první definice je lineární obal $\mathrm{span}(M)$ množiny $M$ tvořený průnikem všech podprostorů, obsahujících množinu $M$. Jinými slovy, $\mathrm{span}(M)$ je (co do inkluze) nejmenší podprostor obsahující $M$.

(a) Ano. Množina $\operatorname{span}(M)$ je již podprostor, tudíž jeho lineární obal je on sám.

(b) Ano. Pokud podprostor $U$ obsahuje množinu $N$, pak obsahuje i množinu $M$. Tudíž při konstrukci lineárního obalu $\operatorname{span}(M)$ děláme průnik z týchž podprostorů, jako při konstrukci $\operatorname{span}(N)$, plus případně ještě z nějakých navíc. Proto $\operatorname{span}(M) \Subset \operatorname{span}(N)$.

(c) Tento vztah obecně neplatí. Vezměme například množiny $M = V$ a $N = M \setminus \{o\}$. Platí, že $\operatorname{span}(M) = \operatorname{span}(N)$, tím pádem i $\operatorname{span}(M) \Subset \operatorname{span}(N)$, ale zároveň neplatí $M \subseteq N$.

(d) Vztah obecně neplatí. Například pro $M = \{(1,0)^T, (0,1)^T\}$ a $N = \{(1,1)^T\}$. Zatímco $\operatorname{span}(M \cap N) = \{o\}$, tak $\operatorname{span}(M) \cap \operatorname{span}(N) = \operatorname{span}(N) = \{(c,c)^T;\ c \in \mathbb{R}\}$.

*Druhý způsob.* Zde vycházíme z tvrzení, že $x \in \operatorname{span}(M)$ právě tehdy, pokud existuje $k \in \mathbb{N}$, vektory $x_1, \ldots, x_k \in M$ a koeficienty $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ takové, že

$$x = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i.$$

(a) Ukážeme nejprve, že $\operatorname{span}(M) \Subset \operatorname{span}(\operatorname{span}(M))$, tedy že

$$x \in \operatorname{span}(M) \quad \Rightarrow \quad x \in \operatorname{span}(\operatorname{span}(M)).$$

Protože $x \in \operatorname{span}(M)$, dá se vyjádřit jako $x = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i$ pro $x_i \in M$. Protože ale $x_i \in \operatorname{span}(M)$ a platí $x = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i$, dostáváme z tvrzení výše, že $x \in \operatorname{span}(\operatorname{span}(M))$.

Naopak pokud $x \in \operatorname{span}(\operatorname{span}(M))$, poté existují $x_1, \ldots, x_k \in \operatorname{span}(M)$ a $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ takové, že $x = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i$. Každé $x_i \in \operatorname{span}(M)$ můžeme vyjádřit jako $x_i = \sum_{j=1}^{\ell_i} \beta_{ij} y_{ij}$ pro jisté $y_{ij} \in M$. Po dosazení dostáváme

$$x = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \left( \sum_{j=1}^{\ell_i} \beta_{ij} y_{ij} \right) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{\ell_i} (\alpha_i \beta_{ij}) y_{ij}.$$

Toto je lineární kombinace vektorů $y_{ij} \in M$ s koeficienty $\alpha_i \beta_{ij}$, tedy $x \in \operatorname{span}(M)$.

(b) Každý vektor $x \in \operatorname{span}(M)$ můžeme vyjádřit jako $x = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i$ pro určité $x_i \in M$ a $k \in \mathbb{N}$. Protože $M \subseteq N$, platí také, že $x_i \in N$, tedy $x \in \operatorname{span}(N)$.

(c) Již jsme nahlédli protipříkladem v první části.

(d) Již jsme nahlédli protipříkladem v první části.

**Cv. 7.8** Rozhodněte, zda vektory $(1,2)^T$ a $(3,4)^T$ generují $\mathbb{R}^2$.

***<u>Řešení:</u>***

Aby dané vektory generovaly $\mathbb{R}^2$, musí jít každý vektor $(a,b)^T \in \mathbb{R}^2$ vyjádřit jako jejich lineární kombinace, tj.

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Pokud rovnost vektorů rozepíšeme po složkách, dostáváme soustavu

$$\begin{aligned} \alpha + 3\beta &= a \\ 2\alpha + 4\beta &= b, \end{aligned}$$

kde $\alpha, \beta$ jsou neznámé. Maticově můžeme soustavu přepsat a vyřešit jako

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & a \\ 2 & 4 & b \end{array}\right).$$

Protože je matice soustavy regulární, má soustava jediné řešení pro jakékoli hodnoty $a, b \in \mathbb{R}$. Každý vektor lze tedy pomocí zadané dvojice jednoznačně generovat. K tomuto závěru nepotřebujeme znát přesný tvar řešení soustavy. Na druhou stranu, řešení soustavy nám dává dodatečnou informaci, a to koeficienty příslušné lineární kombinace. V našem případě je řešení $\alpha = -(2a + \frac{3b}{2})$, $\beta = \frac{2a-b}{2}$.

**Cv. 7.9** Rozhodněte, zda existuje lineární kombinace zadaných vektorů dávající vektor $x = (1, 2, 3)^T$ a pokud ano, tak ji najděte:

(a) $(1, 1, 1)^T, (2, 1, 3)^T, (3, 1, 5)^T$

(b) $(2, 1, 3)^T, (3, 1, 2)^T, (1, 1, 1)^T$.

***Řešení:***

K řešení využijeme postupu z předchozí úlohy, tedy převedení problému hledání koeficientů lineární kombinace na řešení soustavy lineárních rovnic.

(a) Dostáváme soustavu

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 5 & 3 \end{array}\right),$$

která nemá řešení, protože ji můžeme převést Gaussovou eliminací například na tvar

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right).$$

Hledaná lineární kombinace tudíž neexistuje.

(b) Dostáváme soustavu

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right),$$

která má jednoznačné řešení, protože ji můžeme převést Gaussovou eliminací například na tvar

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & -6 \end{array}\right).$$

Řešením je vektor $(1, -1, 2)^T$, tedy platí, že

$$1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

# 8. Lineární závislost a nezávislost

**Cv. 8.1** Diskutujte, kdy je systém jednoho resp. dvou resp. tří vektorů lineárně závislý.

***Řešení:***
1 vektor: Aby množina s jedním vektorem byla lineárně závislá, tak ten vektor musí být nulový.

2 vektory: Aby množina dvou vektorů byla lineárně závislá, jeden vektor musí být násobek druhého.

3 vektory: V tomto případě jeden vektor je lineární kombinací ostatních, ale nemusí být nutně jeden vektor násobek nějakého jiného.

**Cv. 8.2** Zjistěte zda jsou vektory z $\mathbb{R}^3$ lineárně nezávislé:

(a) $(2, 3, -5)^T$, $(1, -1, 1)^T$, $(3, 2, -2)^T$.
(b) $(2, 0, 3)^T$, $(1, -1, 1)^T$, $(0, 2, 1)^T$.

***Řešení:***
Vektory $x_1, \ldots, x_k$ jsou lineárně nezávislé, pokud jediná lineární kombinace

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i = 0$$

má všechny koeficienty $\alpha_1 = \ldots = \alpha_k = 0$. Problém nalezení koeficientů této lineárně kombinace převedeme na hledání řešení soustavy lineárních rovnic.

(a) Hledáme koeficienty $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ takové, že

$$\alpha_1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} + \alpha_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Převedením na řešení soustav lineárních rovnic dostáváme

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ -5 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right).$$

Jediným řešením této soustavy je vektor $(0, 0, 0)^T$, vektory jsou proto lineárně nezávislé.

(b) Opět sestavíme soustavu rovnic

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right),$$

kterou převedeme na odstupňovaný tvar

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Soustava má tedy i netriviální řešení a vektory jsou proto lineárně závislé. Pro úplnost doplníme, že množina řešení soustavy je $\{(-x_3, 2x_3, x_3)^T;\ x_3 \in \mathbb{R}\}$. Tedy například pro $x_3 = 1$ máme

$$-1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

**Cv. 8.3** Nechť $u, v, w$ jsou lineárně nezávislé vektory z vektorového prostoru $V$ nad $\mathbb{R}$. Rozhodněte, zda-li jsou následující množiny lineárně nezávislé.

(a) $\{u, v, o\}$,

(b) $\{w, v, u\}$,

(c) $\{u,\ u + v,\ u + w\}$,

(d) $\{u - v,\ u - w,\ v - w\}$.

***Řešení:***

(a) Lineárně závislé, neboť

$$0 \cdot u + 0 \cdot v + 1 \cdot o = o.$$

(b) Lineárně nezávislé, neboť jsou to ty samé vektory, jenom v jiném pořadí. Změnou pořadí se lineární (ne)závislost vektorů nemění (proč?).

(c) Zde už to očividné není, tak postupujeme obdobně jako v předchozím cvičení 8.2. Hledáme koeficienty $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ takové, aby

$$0 = \alpha_1 u + \alpha_2(u + v) + \alpha_3(u + w) = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)u + \alpha_2 v + \alpha_3 w.$$

Protože $u, v, w$ jsou lineárně nezávislé, musí být $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$, $\alpha_2 = 0$ a $\alpha_3 = 0$ a tedy i $\alpha_1 = 0$. Proto je množina vektorů $\{u, u+v, u+w\}$ lineárně nezávislá.

(d) Obdobně jako v předchozím případě hledáme $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ takové, že

$$0 = \alpha_1(u-v)+\alpha_2(u-w)+\alpha_3(v-w) = (\alpha_1+\alpha_2)u+(-\alpha_1+\alpha_3)v+(-\alpha_2-\alpha_3)w.$$

Z lineární nezávislosti $u, v, w$ dostáváme soustavu

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 &= 0, \\ -\alpha_1 + \alpha_3 &= 0, \\ -\alpha_2 - \alpha_3 &= 0. \end{aligned}$$

Řešením této soustavy je množina $\{(\alpha_3, -\alpha_3, \alpha_3)^T;\ \alpha_3 \in \mathbb{R}\}$. Množina $\{u - v, u - w, v - w\}$ je tedy lineárně závislá, např. pro $\alpha_3 = 1$ máme

$$1 \cdot (u - v) - 1 \cdot (u - w) + 1 \cdot (v - w) = o.$$

**Cv. 8.4** Nechť $V$ je vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{T}$ a mějme dvě množiny vektorů $X \subseteq Y \subseteq V$. Rozhodněte, která z následujících tvrzení jsou pravdivá:

(a) Je-li $X$ nezávislá, pak je $Y$ závislá.
(b) Je-li $X$ nezávislá, pak je $Y$ nezávislá.
(c) Je-li $X$ závislá, pak je $Y$ závislá.
(d) Je-li $Y$ nezávislá, pak je $X$ nezávislá.
(e) Je-li $Y$ závislá, pak je $X$ závislá.

***Řešení:***
Obecně dle definice se dá odvodit, že nezávislost se přenáší „dolů" a závislost „nahoru". Konkrétně:

(a) Neplatí: $X = \{(1,0)^T\}$ a $Y = \{(1,0)^T, (0,1)^T\}$ jsou obě nezávislé v $\mathbb{R}^2$.
(b) Neplatí: $X = \{(1,0)^T\}$ je nezávislá, ale $Y = \{(1,0)^T, (2,0)^T\}$ je už závislá v $\mathbb{R}^2$.
(c) Platí. Mějme $X = \{v_1, \ldots, v_\ell\}$ a $Y = \{v_1, \ldots, v_\ell, w_1 \ldots, w_k\}$. Podle předpokladu je množina $X$ závislá, tedy existují $\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell \in \mathbb{T}$ takové, že $(\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell) \neq (0, \ldots, 0)$ a
$$\sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i x_i = 0.$$
Vezměme $\beta_1, \ldots, \beta_k = (0, \ldots, 0)$. Pak stále platí, že $(\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell, \beta_1, \ldots, \beta_k) \neq (0, \ldots, 0)$ a
$$\sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i v_i + \sum_{j=1}^{k} \beta_j w_j = 0$$
je netriviální lineární kombinace vektorů z $Y$, která se rovná 0. Množina $Y$ je tedy také lineární závislá.
(d) Platí. Jde o obměnu bodu (c).
(e) Neplatí: $Y = \{(1,0)^T, (2,0)^T\}$ je závislá, ale $X = \{(1,0)^T\}$ je nezávislá v $\mathbb{R}^2$.

**Cv. 8.5** Rozhodněte, zda vektory $(0,1,1,1)^T$, $(1,0,1,1)^T$, $(1,1,0,1)^T$, $(1,1,1,0)^T$ jsou lineárně závislé v $\mathbb{R}^4$ resp. v $\mathbb{Z}_3^4$.

***Řešení:***
Úlohu řešíme stejně jako ve cvičení 8.2, jen jednou počítáme nad tělesem $\mathbb{R}$ a podruhé nad $\mathbb{Z}_3$. Zjistíme, že nad $\mathbb{R}$ jsou vektory lineárně nezávislé. Nad $\mathbb{Z}_3$ jsou ale lineárně závislé, například
$$1 \cdot (0,1,1,1)^T + 1 \cdot (1,0,1,1)^T + 1 \cdot (1,1,0,1)^T + 1 \cdot (1,1,1,0)^T = o.$$
Vidíme tedy, že lineární závislost/nezávislost závisí na volbě tělesa vektorového prostoru.

**Cv. 8.6** Buďte $U, V$ podprostory prostoru $W$. Dokažte, že $U \cap V = \{o\}$ právě tehdy, když každý vektor $x \in U + V$ se dá jednoznačně zapsat jako $x = u + v$, kde $u \in U$, $v \in V$.

***Řešení:***

Ekvivalenci dokážeme tak, že ukážeme zvlášť obě implikace.

„$\Rightarrow$“ Z definice spojení prostorů se každý vektor $x \in U + V$ dá zapsat jako $x = u + v$, kde $u \in U$, $v \in V$. Musíme tedy ukázat jednoznačnost tohoto vyjádření. Pro spor mějme dvě vyjádření vektoru $x$,

$$u_1 + v_1 = x = u_2 + v_2$$

pro $u_1, u_2 \in U$ a $v_1, v_2 \in V$. Rovnost upravíme na

$$u_1 - u_2 = v_2 - v_1.$$

Vektor $u_1 - u_2$ leží v $U$ a vektor $v_2 - v_1$ leží ve $V$. Z předpokladu je $U \cap V = \{0\}$, čili $u_1 - u_2 = v_2 - v_1 = 0$. Z toho ale vyplývá, že $u_1 = u_2$ a $v_1 = v_2$ a vyjádření $x$ je tedy jednoznačné. Spor.

„$\Leftarrow$“ Opět postupujeme sporem. Předpokládejme, že existuje nenulový vektor $w \in U \cap V$. Pak tento vektor můžeme vyjádřit dvěma různými způsoby (první sčítanec je z $U$, druhý sčítanec je z $V$):

$$w = w + o = o + w.$$

**Cv. 8.7** Určete, zda následující množiny vektorů jsou lineárně nezávislé v prostoru reálných funkcí $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (nad tělesem $\mathbb{R}$).

(a) $\{2x - 1,\ x - 2,\ 3x\}$.

(b) $\{x^2 + 2x + 3,\ x + 1,\ x - 1\}$.

(c) $\{\sin x,\ \cos x\}$.

***Řešení:***

(a) Označme $f(x) = 2x - 1$, $g(x) = x - 2$ a $h(x) = 3x$. Pak hledáme $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ takové, že $\alpha_1 \cdot f(x) + \alpha_2 \cdot g(x) + \alpha_3 \cdot h(x) = 0$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$. Dostáváme

$$\alpha_1 \cdot (2x - 1) + \alpha_2 \cdot (x - 2) + \alpha_3 \cdot 3x = (2\alpha_1 + \alpha_2 + 3\alpha_3) \cdot x + (-\alpha_1 - 2\alpha_2) = 0.$$

Rovnost je splněna pro všechna $x$ právě tehdy, když je nulový absolutní člen i koeficient u proměnné $x$:

$$\begin{aligned} 2\alpha_1 + \alpha_2 + 3\alpha_3 &= 0, \\ -\alpha_1 - 2\alpha_2 &= 0. \end{aligned}$$

Množina řešení této soustavy je $\{(-2x_3, x_3, x_3)^T;\ x_3 \in \mathbb{R}\}$. Množina $\{2x - 1,\ x - 2,\ 3x\}$ je tedy lineárně závislá, např. pro $x_3 = 1$ máme

$$-2 \cdot (2x - 1) + 1 \cdot (x - 2) + 1 \cdot (3x) = 0.$$

(b) Opět hledáme $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ takové, že

$$\alpha_1 \cdot (x^2 + 2x + 3) + \alpha_2 \cdot (x + 1) + \alpha_3 \cdot (x - 1) = 0,$$

neboli

$$\alpha_1 \cdot x^2 + (2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) \cdot x + (3\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3) = 0.$$

Aby byl polynom nulový pro všechna $x \in \mathbb{R}$, musí být všechny koeficienty polynomu nulové. Z toho dostaneme homogenní soustavu

$$\left(\begin{array}{ccr|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right).$$

Tato soustava má jediné řešení $(0,0,0)^T$, polynomy jsou tedy lineárně nezávislé.

(c) Hledáme řešení rovnice

$$\alpha_1 \sin x + \alpha_2 \cos x = 0,$$

čili taková $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, aby rovnice byla splněna pro každé $x \in \mathbb{R}$. Protože nemůžeme sestavit soustavu rovnic podobně jako v předchozích podúlohách, snažíme se nalézt takové $x \in \mathbb{R}$, pro které vynutíme z rovnosti konkrétní hodnoty $\alpha_1, \alpha_2$. Pokud dosadíme $x = 0$, dostaneme $\alpha_2 = 0$, protože $\sin 0 = 0$ a $\cos 0 = 1$. Pokud dosadíme $x = \frac{\pi}{2}$, pak nutně $\alpha_1 = 0$, protože $\sin \frac{\pi}{2} = 1$ a $\cos \frac{\pi}{2} = 0$. Aby byla rovnice splněna, nutně musí $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Zároveň vidíme, že $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ splňují tuto rovnici. Funkce jsou tedy lineárně nezávislé.

**Cv. 8.8** Najděte čtyři lineárně závislé vektory z $\mathbb{R}^4$ tak, aby:

(a) právě jeden vektor byl lineárně závislý na ostatních,

(b) právě dva vektory byly lineárně závislé na ostatních třech,

(c) právě tři vektory byly lineárně závislé na ostatních třech,

(d) každý z nich byl lineárně závislých na ostatních třech,

***Řešení:***

(a) Například $e_1$, $e_2$, $e_3$, $o$ (ten poslední).

(b) Například $e_1$, $e_2$, $e_3$, $2e_3$ (ty poslední dva).

(c) Například $e_1$, $e_2$, $e_3$, $e_2 + e_3$ (ty poslední tři).

(d) Například $e_1$, $e_2$, $e_3$, $e_1 + e_2 + e_3$.