7. Vektorové prostory a podprostory, lineární obal

Vektorové prostory a podprostory

Cv. 7.1 Rozhodněte, zda tvoří vektorový prostor:

(a) $\mathbb{Z}_p^n$ nad $\mathbb{Z}_p$,

(b) $\mathbb{R}^n$ nad $\mathbb{Q}$,

(c) $\mathbb{Q}^n$ nad $\mathbb{R}$,

(d) $\mathbb{R}^n$ nad $\mathbb{R}$ s operacemi $x \oplus y = x + y$, $\alpha \odot x = -\alpha \cdot x$,

(e) $\mathbb{R}^n$ nad $\mathbb{R}$ s operacemi $x \oplus y = x + y$, $\alpha \odot x = |\alpha| \cdot x$,

(f) $U \times V$ nad $\mathbb{T}$, kde U, V jsou vektorové prostory nad $\mathbb{T}$, sčítání a násobení je definováno standardně po složkách.

(g) množina všech zobrazení $f\colon M \to V$ nad tělesem $\mathbb{T}$, kde M je daná množina a V vektorový prostor nad $\mathbb{T}$.

Cv. 7.2 Najděte netriviální podmnožinu $\mathbb{R}^2$, která je:

(a) uzavřená na sčítání a odčítání, ale ne na násobky,

(b) uzavřená na násobky, ale ne na sčítání.

Cv. 7.3 Rozhodněte, zda následující množiny vektorů tvoří podprostor $\mathbb{R}^2$:

(a) $\{(s, 5s)^T;\ s \in \mathbb{R}\}$,

(b) $\{(s + t, 1)^T;\ s, t \in \mathbb{R}\}$,

(c) $\{(s, s^2)^T;\ s \in \mathbb{R}\}$,

(d) $\{(s - t, 2t)^T;\ s, t \in \mathbb{R}\}$.

Cv. 7.4 Buď $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Dokažte, že $\{x \in \mathbb{R}^n;\ Ax = 0\}$ tvoří vektorový podprostor $\mathbb{R}^n$.

Cv. 7.5 Nalezněte vlastní příklady podprostorů prostoru matic $\mathbb{R}^{n \times n}$ nad $\mathbb{R}$.

Cv. 7.6 Rozhodněte, zda následující tvoří podprostor prostoru reálných posloupností $\mathbb{R}^\infty = \{(x_1, x_2, \dots);\ x_i \in \mathbb{R},\ i \in \mathbb{N}\}$:

(a) posloupnosti s nekonečně mnoha nulami,

(b) posloupnosti s konečně mnoha nenulami,

(c) monotónní posloupnosti (neklesající a nerostoucí posloupnosti čísel),

(d) fibonacciovské posloupnosti (splňující $x_{i+1} = x_i + x_{i-1}$, kde $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ jsou libovolné).

Lineární obal, lineární kombinace

Cv. 7.7 Buď V vektorový prostor a $M, N \subseteq V$ množiny vektorů. Rozhodněte, zda platí

(a) $\operatorname{span}(\operatorname{span}(M)) = \operatorname{span}(M)$,

(b) $M \subseteq N \;\Rightarrow\; \operatorname{span}(M) \Subset \operatorname{span}(N)$,

(c) $M \subseteq N \;\Leftarrow\; \operatorname{span}(M) \Subset \operatorname{span}(N)$,

(d) $\operatorname{span}(M \cap N) = \operatorname{span}(M) \cap \operatorname{span}(N)$,

Cv. 7.8 Rozhodněte, zda vektory $(1,2)^T$ a $(3,4)^T$ generují $\mathbb{R}^2$.

Cv. 7.9 Rozhodněte, zda existuje lineární kombinace zadaných vektorů dávající vektor $x = (1,2,3)^T$ a pokud ano, tak ji najděte:

(a) $(1,1,1)^T, (2,1,3)^T, (3,1,5)^T$

(b) $(2,1,3)^T, (3,1,2)^T, (1,1,1)^T$.

8. Lineární závislost a nezávislost

Cv. 8.1 Diskutujte, kdy je systém jednoho resp. dvou resp. tří vektorů lineárně závislý.

Cv. 8.2 Zjistěte zda jsou vektory z $\mathbb{R}^3$ lineárně nezávislé:

(a) $(2,3,-5)^T$, $(1,-1,1)^T$, $(3,2,-2)^T$.

(b) $(2,0,3)^T$, $(1,-1,1)^T$, $(0,2,1)^T$.

Cv. 8.3 Nechť u,v,w jsou lineárně nezávislé vektory z vektorového prostoru V nad $\mathbb{R}$. Rozhodněte, zda-li jsou následující množiny lineárně nezávislé.

(a) $\{u,v,o\}$,

(b) $\{w,v,u\}$,

(c) $\{u,\ u+v,\ u+w\}$,

(d) $\{u-v,\ u-w,\ v-w\}$.

Cv. 8.4 Nechť V je vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{T}$ a mějme dvě množiny vektorů $X \subseteq Y \subseteq V$. Rozhodněte, která z následujících tvrzení jsou pravdivá:

(a) Je-li X nezávislá, pak je Y závislá.

(b) Je-li X nezávislá, pak je Y nezávislá.

(c) Je-li X závislá, pak je Y závislá.

(d) Je-li Y nezávislá, pak je X nezávislá.

(e) Je-li Y závislá, pak je X závislá.

Cv. 8.5 Rozhodněte, zda vektory $(0,1,1,1)^T$, $(1,0,1,1)^T$, $(1,1,0,1)^T$, $(1,1,1,0)^T$ jsou lineárně závislé v $\mathbb{R}^4$ resp. v $\mathbb{Z}_3^4$.

Cv. 8.6 Buďte U,V podprostory prostoru W. Dokažte, že $U \cap V = \{o\}$ právě tehdy, když každý vektor $x \in U+V$ se dá jednoznačně zapsat jako $x = u+v$, kde $u \in U$, $v \in V$.

Cv. 8.7 Určete, zda následující množiny vektorů jsou lineárně nezávislé v prostoru reálných funkcí $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (nad tělesem $\mathbb{R}$).

(a) $\{2x-1,\ x-2,\ 3x\}$.

(b) $\{x^2+2x+3,\ x+1,\ x-1\}$.

(c) $\{\sin x,\ \cos x\}$.

Cv. 8.8 Najděte čtyři lineárně závislé vektory z $\mathbb{R}^4$ tak, aby:

(a) právě jeden vektor byl lineárně závislý na ostatních,

(b) právě dva vektory byly lineárně závislé na ostatních třech,

(c) právě tři vektory byly lineárně závislé na ostatních třech,

(d) každý z nich byl lineárně závislých na ostatních třech,