8. Lineární závislost a nezávislost

Cv. 8.1 Diskutujte, kdy je systém jednoho resp. dvou resp. tří vektorů lineárně závislý.

Řešení:

1 vektor: Aby množina s jedním vektorem byla lineárně závislá, tak ten vektor musí být nulový.

2 vektory: Aby množina dvou vektorů byla lineárně závislá, jeden vektor musí být násobek druhého.

3 vektory: V tomto případě jeden vektor je lineární kombinací ostatních, ale nemusí být nutně jeden vektor násobek nějakého jiného.

Cv. 8.2 Zjistěte zda jsou vektory z $\mathbb{R}^3$ lineárně nezávislé:

(a) $(2,3,-5)^T$, $(1,-1,1)^T$, $(3,2,-2)^T$.

(b) $(2,0,3)^T$, $(1,-1,1)^T$, $(0,2,1)^T$.

Řešení:

Vektory $x_1, \ldots, x_k$ jsou lineárně nezávislé, pokud jediná lineární kombinace

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i = 0$$

má všechny koeficienty $\alpha_1 = \ldots = \alpha_k = 0$. Problém nalezení koeficientů této lineárně kombinace převedeme na hledání řešení soustavy lineárních rovnic.

(a) Hledáme koeficienty $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ takové, že

$$\alpha_1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} + \alpha_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Převedením na řešení soustav lineárních rovnic dostáváme

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ -5 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right).$$

Jediným řešením této soustavy je vektor $(0,0,0)^T$, vektory jsou proto lineárně nezávislé.

(b) Opět sestavíme soustavu rovnic

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right),$$

kterou převedeme na odstupňovaný tvar

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Soustava má tedy i netriviální řešení a vektory jsou proto lineárně závislé. Pro úplnost doplníme, že množina řešení soustavy je $\{(-x_3, 2x_3, x_3)^T;\ x_3 \in \mathbb{R}\}$. Tedy například pro $x_3 = 1$ máme

$$-1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Cv. 8.3 Nechť u, v, w jsou lineárně nezávislé vektory z vektorového prostoru V nad $\mathbb{R}$. Rozhodněte, zda-li jsou následující množiny lineárně nezávislé.

(a) $\{u, v, o\}$,

(b) $\{w, v, u\}$,

(c) $\{u,\ u + v,\ u + w\}$,

(d) $\{u - v,\ u - w,\ v - w\}$.

Řešení:

(a) Lineárně závislé, neboť

$$0 \cdot u + 0 \cdot v + 1 \cdot o = o.$$

(b) Lineárně nezávislé, neboť jsou to ty samé vektory, jenom v jiném pořadí. Změnou pořadí se lineární (ne)závislost vektorů nemění (proč?).

(c) Zde už to očividné není, tak postupujeme obdobně jako v předchozím cvičení 8.2. Hledáme koeficienty $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ takové, aby

$$0 = \alpha_1 u + \alpha_2(u + v) + \alpha_3(u + w) = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)u + \alpha_2 v + \alpha_3 w.$$

Protože u, v, w jsou lineárně nezávislé, musí být $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$, $\alpha_2 = 0$ a $\alpha_3 = 0$ a tedy i $\alpha_1 = 0$. Proto je množina vektorů $\{u, u+v, u+w\}$ lineárně nezávislá.

(d) Obdobně jako v předchozím případě hledáme $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ takové, že

$$0 = \alpha_1(u-v)+\alpha_2(u-w)+\alpha_3(v-w) = (\alpha_1+\alpha_2)u+(-\alpha_1+\alpha_3)v+(-\alpha_2-\alpha_3)w.$$

Z lineární nezávislosti u, v, w dostáváme soustavu

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 &= 0, \\ -\alpha_1 + \alpha_3 &= 0, \\ -\alpha_2 - \alpha_3 &= 0. \end{aligned}$$

Řešením této soustavy je množina $\{(\alpha_3, -\alpha_3, \alpha_3)^T;\ \alpha_3 \in \mathbb{R}\}$. Množina $\{u - v, u - w, v - w\}$ je tedy lineárně závislá, např. pro $\alpha_3 = 1$ máme

$$1 \cdot (u - v) - 1 \cdot (u - w) + 1 \cdot (v - w) = o.$$

Cv. 8.4 Nechť V je vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{T}$ a mějme dvě množiny vektorů $X \subseteq Y \subseteq V$. Rozhodněte, která z následujících tvrzení jsou pravdivá:

(a) Je-li X nezávislá, pak je Y závislá.
(b) Je-li X nezávislá, pak je Y nezávislá.
(c) Je-li X závislá, pak je Y závislá.
(d) Je-li Y nezávislá, pak je X nezávislá.
(e) Je-li Y závislá, pak je X závislá.

Řešení:
Obecně dle definice se dá odvodit, že nezávislost se přenáší „dolů" a závislost „nahoru". Konkrétně:

(a) Neplatí: $X = \{(1,0)^T\}$ a $Y = \{(1,0)^T, (0,1)^T\}$ jsou obě nezávislé v $\mathbb{R}^2$.
(b) Neplatí: $X = \{(1,0)^T\}$ je nezávislá, ale $Y = \{(1,0)^T, (2,0)^T\}$ je už závislá v $\mathbb{R}^2$.
(c) Platí. Mějme $X = \{v_1, \dots, v_\ell\}$ a $Y = \{v_1, \dots, v_\ell, w_1 \dots, w_k\}$. Podle předpokladu je množina X závislá, tedy existují $\alpha_1, \dots, \alpha_\ell \in \mathbb{T}$ takové, že $(\alpha_1, \dots, \alpha_\ell) \neq (0, \dots, 0)$ a
$$\sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i x_i = 0.$$
Vezměme $\beta_1, \dots, \beta_k = (0, \dots, 0)$. Pak stále platí, že $(\alpha_1, \dots, \alpha_\ell, \beta_1, \dots, \beta_k) \neq (0, \dots, 0)$ a
$$\sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i v_i + \sum_{j=1}^{k} \beta_j w_j = 0$$
je netriviální lineární kombinace vektorů z Y, která se rovná 0. Množina Y je tedy také lineární závislá.
(d) Platí. Jde o obměnu bodu (c).
(e) Neplatí: $Y = \{(1,0)^T, (2,0)^T\}$ je závislá, ale $X = \{(1,0)^T\}$ je nezávislá v $\mathbb{R}^2$.

Cv. 8.5 Rozhodněte, zda vektory $(0,1,1,1)^T$, $(1,0,1,1)^T$, $(1,1,0,1)^T$, $(1,1,1,0)^T$ jsou lineárně závislé v $\mathbb{R}^4$ resp. v $\mathbb{Z}_3^4$.

Řešení:
Úlohu řešíme stejně jako ve cvičení 8.2, jen jednou počítáme nad tělesem $\mathbb{R}$ a podruhé nad $\mathbb{Z}_3$. Zjistíme, že nad $\mathbb{R}$ jsou vektory lineárně nezávislé. Nad $\mathbb{Z}_3$ jsou ale lineárně závislé, například
$$1 \cdot (0,1,1,1)^T + 1 \cdot (1,0,1,1)^T + 1 \cdot (1,1,0,1)^T + 1 \cdot (1,1,1,0)^T = o.$$
Vidíme tedy, že lineární závislost/nezávislost závisí na volbě tělesa vektorového prostoru.

Cv. 8.6 Buďte U, V podprostory prostoru W. Dokažte, že $U \cap V = \{o\}$ právě tehdy, když každý vektor $x \in U + V$ se dá jednoznačně zapsat jako $x = u + v$, kde $u \in U$, $v \in V$.

Řešení:

Ekvivalenci dokážeme tak, že ukážeme zvlášť obě implikace.

„$\Rightarrow$“ Z definice spojení prostorů se každý vektor $x \in U + V$ dá zapsat jako $x = u + v$, kde $u \in U$, $v \in V$. Musíme tedy ukázat jednoznačnost tohoto vyjádření. Pro spor mějme dvě vyjádření vektoru x,

$$u_1 + v_1 = x = u_2 + v_2$$

pro $u_1, u_2 \in U$ a $v_1, v_2 \in V$. Rovnost upravíme na

$$u_1 - u_2 = v_2 - v_1.$$

Vektor $u_1 - u_2$ leží v U a vektor $v_2 - v_1$ leží ve V. Z předpokladu je $U \cap V = \{0\}$, čili $u_1 - u_2 = v_2 - v_1 = 0$. Z toho ale vyplývá, že $u_1 = u_2$ a $v_1 = v_2$ a vyjádření x je tedy jednoznačné. Spor.

„$\Leftarrow$“ Opět postupujeme sporem. Předpokládejme, že existuje nenulový vektor $w \in U \cap V$. Pak tento vektor můžeme vyjádřit dvěma různými způsoby (první sčítanec je z U, druhý sčítanec je z V):

$$w = w + o = o + w.$$

Cv. 8.7 Určete, zda následující množiny vektorů jsou lineárně nezávislé v prostoru reálných funkcí $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (nad tělesem $\mathbb{R}$).

(a) $\{2x - 1,\ x - 2,\ 3x\}$.

(b) $\{x^2 + 2x + 3,\ x + 1,\ x - 1\}$.

(c) $\{\sin x,\ \cos x\}$.

Řešení:

(a) Označme $f(x) = 2x-1$, $g(x) = x-2$ a $h(x) = 3x$. Pak hledáme $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ takové, že $\alpha_1 \cdot f(x) + \alpha_2 \cdot g(x) + \alpha_3 \cdot h(x) = 0$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$. Dostáváme

$$\alpha_1 \cdot (2x-1) + \alpha_2 \cdot (x-2) + \alpha_3 \cdot 3x = (2\alpha_1 + \alpha_2 + 3\alpha_3) \cdot x + (-\alpha_1 - 2\alpha_2) = 0.$$

Rovnost je splněna pro všechna x právě tehdy, když je nulový absolutní člen i koeficient u proměnné x:

$$\begin{aligned} 2\alpha_1 + \alpha_2 + 3\alpha_3 &= 0, \\ -\alpha_1 - 2\alpha_2 &= 0. \end{aligned}$$

Množina řešení této soustavy je $\{(-2x_3, x_3, x_3)^T;\ x_3 \in \mathbb{R}\}$. Množina $\{2x - 1,\ x - 2,\ 3x\}$ je tedy lineárně závislá, např. pro $x_3 = 1$ máme

$$-2 \cdot (2x-1) + 1 \cdot (x-2) + 1 \cdot (3x) = 0.$$

(b) Opět hledáme $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ takové, že

$$\alpha_1 \cdot (x^2 + 2x + 3) + \alpha_2 \cdot (x + 1) + \alpha_3 \cdot (x - 1) = 0,$$

neboli

$$\alpha_1 \cdot x^2 + (2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) \cdot x + (3\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3) = 0.$$

Aby byl polynom nulový pro všechna $x \in \mathbb{R}$, musí být všechny koeficienty polynomu nulové. Z toho dostaneme homogenní soustavu

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right).$$

Tato soustava má jediné řešení $(0, 0, 0)^T$, polynomy jsou tedy lineárně nezávislé.

(c) Hledáme řešení rovnice

$$\alpha_1 \sin x + \alpha_2 \cos x = 0,$$

čili taková $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, aby rovnice byla splněna pro každé $x \in \mathbb{R}$. Protože nemůžeme sestavit soustavu rovnic podobně jako v předchozích podúlohách, snažíme se nalézt takové $x \in \mathbb{R}$, pro které vynutíme z rovnosti konkrétní hodnoty α_1, α_2. Pokud dosadíme $x = 0$, dostaneme $\alpha_2 = 0$, protože $\sin 0 = 0$ a $\cos 0 = 1$. Pokud dosadíme $x = \frac{\pi}{2}$, pak nutně $\alpha_1 = 0$, protože $\sin \frac{\pi}{2} = 1$ a $\cos \frac{\pi}{2} = 0$. Aby byla rovnice splněna, nutně musí $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Zároveň vidíme, že $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ splňují tuto rovnici. Funkce jsou tedy lineárně nezávislé.

Cv. 8.8 Najděte čtyři lineárně závislé vektory z $\mathbb{R}^4$ tak, aby:

(a) právě jeden vektor byl lineárně závislý na ostatních,

(b) právě dva vektory byly lineárně závislé na ostatních třech,

(c) právě tři vektory byly lineárně závislé na ostatních třech,

(d) každý z nich byl lineárně závislých na ostatních třech,

Řešení:

(a) Například e_1, e_2, e_3, o (ten poslední).

(b) Například e_1, e_2, e_3, $2e_3$ (ty poslední dva).

(c) Například e_1, e_2, e_3, $e_2 + e_3$ (ty poslední tři).

(d) Například e_1, e_2, e_3, $e_1 + e_2 + e_3$.

9. Báze a dimenze

Báze a souřadnice

Cv. 9.1 Najděte bázi a určete dimenzi následujících vektorových prostorů:

(a) $\mathbb{R}^2$ nad $\mathbb{R}$,

(b) $\mathbb{C}^2$ nad $\mathbb{C}$,

(c) $\mathbb{C}^2$ nad $\mathbb{R}$,

(d) $\mathcal{P}^2$,

(e) $\mathbb{R}^{2\times 2}$ nad $\mathbb{R}$,

(f) prostor symetrických matic v $\mathbb{R}^{2\times 2}$ nad $\mathbb{R}$.

Řešení:

(a) Bázi tvoří například e_1, e_2 či jakékoli dva lineárně nezávislé vektory. Dimenze je tudíž 2.

(b) Bázi tvoří například e_1, e_2 či jakékoli dva lineárně nezávislé vektory. Dimenze je tudíž 2.

Tato vlastnost platí obecně. Je-li $\mathbb{T}$ těleso, pak vektorový prostor $\mathbb{T}^2$ nad $\mathbb{T}$ má dimenzi 2 a jeho bází je například kanonická báze e_1, e_2. Důkaz: vektory e_1, e_2 jsou zřejmě lineárně nezávislé a každý vektor $v = (v_1, v_2)^T \in \mathbb{T}$ lze napsat $v = v_1(1,0)^T + v_2(0,1)^T = v_1e_1 + v_2e_2$.

(c) Bázi tvoří například $e_1, e_2, (i,0)^T, (0,i)^T$. Dimenze je tudíž 4.

Důkaz. Nejprve ukážeme, že to jsou generátory. Každý vektor $v \in \mathbb{C}^2$ je tvaru $v = (a_1 + b_1 i, a_2 + b_2 i)^T$, kde $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$. Můžeme tento vektor tedy vyjádřit

$$v = a_1(1,0)^T + b_1(i,0)^T + a_2(0,1)^T + b_2(0,i)^T.$$

Lineární nezávislost. Uvažujme lineární kombinaci vektorů (s reálnými koeficienty!)

$$a_1(1,0)^T + b_1(i,0)^T + a_2(0,1)^T + b_2(0,i)^T = (0,0)^T, \quad a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}.$$

Rovnice lze ekvivalentně psát $(a_1 + b_1 i, a_2 + b_2 i)^T = (0,0)^T$ a je splněna právě tehdy, když $a_1 = b_1 = a_2 = b_2 = 0$.

(d) Bázi tvoří například $1, x, x^2$. Dimenze je tudíž 3.

(e) Bázi tvoří například $\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix}0&1\\0&0\end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix}0&0\\1&0\end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)$. Dimenze je tudíž 4.

(f) Bázi tvoří například $\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)$. Dimenze je tudíž 3.

Cv. 9.2 Zjistěte, zda $(-1,5,3)^T \in \operatorname{span}\{(1,2,2)^T, (4,1,3)^T\}$.

Pokud ano, tak určete souřadnice vektoru vzhledem k dané bázi.

Řešení:

10. Maticové prostory

Cv. 10.1 Buď

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Postupně nad tělesy $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}_5$ a $\mathbb{Z}_7$ rozhodněte, zda platí:

(a) $v \in \mathrm{Ker}(A)$,

(b) $v \in \mathcal{S}(A)$.

Řešení:

Z definice jádra a sloupcového prostoru matice platí

$$\begin{aligned} \mathrm{Ker}(A) &= \{x \in \mathbb{T}^n;\ Ax = 0\}, \\ \mathcal{S}(A) &= \mathrm{span}\{A_{*1}, \dots, A_{*n}\} = \{Ax;\ x \in \mathbb{T}^n\}, \end{aligned}$$

stačí tedy ověřit, zda vektor $v = (1,2)^T$ řeší soustavu $Ax = 0$ nad daným tělesem a zda platí $Ax = v$ pro nějaké $x \in \mathbb{T}^2$.

Nad tělesem $\mathbb{R}$*:*

(a) vektor v nepatří do jádra matice A, protože

$$Av = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

(b) vektor v patří do sloupcového prostoru matice A, protože soustava

$$(A \mid v) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{3}{5} \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} \end{array}\right)$$

má řešení, konkrétně platí $(1,2)^T = \frac{3}{5}(1,3)^T + \frac{1}{5}(2,1)^T$.

Nad tělesem $\mathbb{Z}_5$*:*

(a) vektor v patří do $\mathrm{Ker}(A)$, protože

$$Av = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

(b) vektor v nepatří do $\mathcal{S}(A)$, protože soustava

$$(A \mid v) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{array}\right)$$

nemá nad tělesem $\mathbb{Z}_5$ řešení.

Nad tělesem $\mathbb{Z}_7$*:*

(a) vektor v nepatří $\mathrm{Ker}(A)$, protože

$$Av = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

(b) vektor v patří do $\mathcal{S}(A)$, protože soustava

$$\left(A \mid v \right) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

má nad tělesem $\mathbb{Z}_7$ řešení a platí $(1,2)^T = 2(1,3)^T + 3(2,1)^T$.

Cv. 10.2 Najděte báze prostorů $\mathcal{R}(A)$, $\mathcal{S}(A)$ a $\mathrm{Ker}(A)$ pro matici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 6 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Řešení:
Převedeme matici A do redukovaného odstupňovaného tvaru $\mathrm{RREF}(A)$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 6 & 1 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{RREF}(A).$$

Bázi řádkového prostoru $\mathcal{R}(A)$ tvoří (například) nenulové vektory v řádcích výsledné matice, tedy vektory $(1,2,0,1)^T$, $(0,0,1,1)^T$. Důvodem je, že elementární řádkové úpravy nemění řádkový prostor matice, a tedy $\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(\mathrm{RREF}(A))$. Najít bázi řádkového prostoru matice $\mathrm{RREF}(A)$ je pak jednoduché – jsou to všechny nenulové řádky.

Bázi sloupcového prostoru můžeme vybrat z původních sloupců matice A, které odpovídají bázickým sloupcům odstupňovaného tvaru. Bázické sloupce jsou první a třetí, tedy vektory $(1,2,3)^T$ a $(2,1,1)^T$ tvoří bázi $\mathcal{S}(A)$. Zdůvodnění je teď jiné, než v případě řádkového prostoru, protože elementární řádkové úpravy obecně mohou změnit sloupový prostor matice. Co ale elementární řádkové úpravy nemění, je lineární závislost a nezávislost mezi sloupci. Tudíž můžeme tvrdit: bázi $\mathcal{S}(\mathrm{RREF}(A)$ tvoří první a třetí sloupec matice $\mathrm{RREF}(A)$, proto bázi $\mathcal{S}(A)$ tvoří první a třetí sloupec matice A.

Bázi jádra matice A získáme z řešení soustavy $Ax = 0$. Množinu všech řešení této soustavy můžeme vyjádřit pomocí nebázických proměnných x_2, x_4 ve tvaru

$$(-2x_2 - x_4, x_2, -x_4, x_4)^T = (-2,1,0,0)^T x_2 + (-1,0,-1,1)^T x_4.$$

Bázi $\mathrm{Ker}(A)$ tedy tvoří např. vektory $(-2,1,0,0)^T$, $(-1,0,-1,1)^T$.

Cv. 10.3 Najděte matici A takovou, že

(a) $\mathcal{R}(A)$ obsahuje vektory $(1,1)^T, (1,2)^T$ a $\mathcal{S}(A)$ obsahuje $(1,0,0)^T$, $(0,0,1)^T$,

(b) bázi $\mathcal{R}(A)$ i $\mathcal{S}(A)$ tvoří vektor $(1,1,1)^T$ a báze $\mathrm{Ker}(A)$ je $(1,-2,1)^T$.

Řešení: