8. Lineární závislost a nezávislost

Cv. 8.1 Diskutujte, kdy je systém jednoho resp. dvou resp. tří vektorů lineárně závislý.

Cv. 8.2 Zjistěte zda jsou vektory z $\mathbb{R}^3$ lineárně nezávislé:

(a) $(2,3,-5)^T$, $(1,-1,1)^T$, $(3,2,-2)^T$.
(b) $(2,0,3)^T$, $(1,-1,1)^T$, $(0,2,1)^T$.

Cv. 8.3 Nechť u, v, w jsou lineárně nezávislé vektory z vektorového prostoru V nad $\mathbb{R}$. Rozhodněte, zda-li jsou následující množiny lineárně nezávislé.

(a) $\{u, v, o\}$,
(b) $\{w, v, u\}$,
(c) $\{u,\ u+v,\ u+w\}$,
(d) $\{u-v,\ u-w,\ v-w\}$.

Cv. 8.4 Nechť V je vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{T}$ a mějme dvě množiny vektorů $X \subseteq Y \subseteq V$. Rozhodněte, která z následujících tvrzení jsou pravdivá:

(a) Je-li X nezávislá, pak je Y závislá.
(b) Je-li X nezávislá, pak je Y nezávislá.
(c) Je-li X závislá, pak je Y závislá.
(d) Je-li Y nezávislá, pak je X nezávislá.
(e) Je-li Y závislá, pak je X závislá.

Cv. 8.5 Rozhodněte, zda vektory $(0,1,1,1)^T$, $(1,0,1,1)^T$, $(1,1,0,1)^T$, $(1,1,1,0)^T$ jsou lineárně závislé v $\mathbb{R}^4$ resp. v $\mathbb{Z}_3^4$.

Cv. 8.6 Buďte U, V podprostory prostoru W. Dokažte, že $U \cap V = \{o\}$ právě tehdy, když každý vektor $x \in U + V$ se dá jednoznačně zapsat jako $x = u + v$, kde $u \in U$, $v \in V$.

Cv. 8.7 Určete, zda následující množiny vektorů jsou lineárně nezávislé v prostoru reálných funkcí $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (nad tělesem $\mathbb{R}$).

(a) $\{2x-1,\ x-2,\ 3x\}$.
(b) $\{x^2+2x+3,\ x+1,\ x-1\}$.
(c) $\{\sin x,\ \cos x\}$.

Cv. 8.8 Najděte čtyři lineárně závislé vektory z $\mathbb{R}^4$ tak, aby:

(a) právě jeden vektor byl lineárně závislý na ostatních,
(b) právě dva vektory byly lineárně závislé na ostatních třech,
(c) právě tři vektory byly lineárně závislé na ostatních třech,
(d) každý z nich byl lineárně závislých na ostatních třech,

9. Báze a dimenze

Báze a souřadnice

Cv. 9.1 Najděte bázi a určete dimenzi následujících vektorových prostorů:

(a) $\mathbb{R}^2$ nad $\mathbb{R}$,
(b) $\mathbb{C}^2$ nad $\mathbb{C}$,
(c) $\mathbb{C}^2$ nad $\mathbb{R}$,
(d) $\mathcal{P}^2$,
(e) $\mathbb{R}^{2\times 2}$ nad $\mathbb{R}$,
(f) prostor symetrických matic v $\mathbb{R}^{2\times 2}$ nad $\mathbb{R}$.

Cv. 9.2 Zjistěte, zda $(-1,5,3)^T \in \operatorname{span}\{(1,2,2)^T,\ (4,1,3)^T\}$.

Pokud ano, tak určete souřadnice vektoru vzhledem k dané bázi.

Cv. 9.3 V prostoru $\mathcal{P}^2$ najděte souřadnice vektoru x^2+2 vzhledem k bázi x^2+1, $x-2$, $2x^2+x-1$.

Cv. 9.4 Souřadnice vektoru v vzhledem k bázi $B=\{z_1,z_2,z_3,z_4\}$ jsou $[v]_B=(a_1,a_2,a_3,a_4)^T$. Určete souřadnice vektoru v vzhledem k bázi B', pokud

(a) $B'=\{z_4,z_3,z_2,z_1\}$,
(b) $B'=\{z_1+z_4,z_2,z_3,z_4\}$,
(c) $B'=\{z_1+z_4,z_2+z_3,z_4,z_2\}$.

Dimenze

Cv. 9.5 Najděte všechny podprostory vektorového prostoru $\mathbb{R}^2$ nad $\mathbb{R}$.

Cv. 9.6 Určete počet podprostorů $\mathbb{Z}_p^2$ nad $\mathbb{Z}_p$.

Cv. 9.7 Buďte U,V podprostory vektorového prostoru W a nechť $\dim U=7$, $\dim V=8$, $\dim W=13$.

(a) Odhadněte zdola a shora hodnotu $\dim(U+V)$ a najděte konkrétní příklady, kdy se obě meze nabydou.
(b) Odhadněte zdola a shora hodnotu $\dim(U\cap V)$ a opět ukažte, že je odhad těsný.

Direktní součet

Cv. 9.8 Nechť U,V jsou podprostory vektorového prstoru W. Dokažte, že pokud $U\cap V=\{o\}$, pak každý vektor $w\in U+V$ lze zapsat jediným způsobem ve tvaru $w=u+v$, kde $u\in U$ a $v\in V$.

Cv. 9.9 Buď W direktním součtem svých podprostorů U,V. Dokažte: Je-li $u_1,\dots,u_m$ báze U a $v_1,\dots,v_n$ báze V, pak $u_1,\dots,u_m,v_1,\dots,v_n$ je báze W.

10. Maticové prostory

Cv. 10.1 Buď

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Postupně nad tělesy $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}_5$ a $\mathbb{Z}_7$ rozhodněte, zda platí:

(a) $v \in \operatorname{Ker}(A)$,

(b) $v \in \mathcal{S}(A)$.

Cv. 10.2 Najděte báze prostorů $\mathcal{R}(A)$, $\mathcal{S}(A)$ a $\operatorname{Ker}(A)$ pro matici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 6 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Cv. 10.3 Najděte matici A takovou, že

(a) $\mathcal{R}(A)$ obsahuje vektory $(1,1)^T, (1,2)^T$ a $\mathcal{S}(A)$ obsahuje $(1,0,0)^T$, $(0,0,1)^T$,

(b) bázi $\mathcal{R}(A)$ i $\mathcal{S}(A)$ tvoří vektor $(1,1,1)^T$ a báze $\operatorname{Ker}(A)$ je $(1,-2,1)^T$.

Cv. 10.4 Rozhodněte, zda pro matice $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ platí

(a) $\mathcal{S}(A) = \mathcal{S}(B)$ implikuje $\operatorname{RREF}(A) = \operatorname{RREF}(B)$,

(b) $\operatorname{RREF}(A) = \operatorname{RREF}(B)$ implikuje $\mathcal{S}(A) = \mathcal{S}(B)$.

Cv. 10.5 S využitím maticových prostorů určete dimenzi prostoru

$$V = \{x \in \mathbb{R}^n;\ x_1 + \ldots + x_n = 0\}.$$

Cv. 10.6 Z vektorů vyberte bázi prostoru $V = \operatorname{span}\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ a pro ostatní vektory najděte souřadnice vůči této bázi:

$$v_1 = (3,1,5,4)^T,\ v_2 = (2,2,3,3)^T,\ v_3 = (1,-1,2,1)^T,\ v_4 = (1,3,1,1)^T.$$

Cv. 10.7 Určete, jaký je vztah mezi prostory $\operatorname{Ker}(AB)$ a $\operatorname{Ker}(B)$ pro matice

(a) $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$,

(b) $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ regulární, $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$.

Cv. 10.8 Rozhodněte, zda platí $\operatorname{rank}(A+B) \le \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B)$ pro $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$.
(*Hint:* Jaký je vztah mezi prostory $\mathcal{S}(A+B)$ a $\mathcal{S}(A) + \mathcal{S}(B)$?)