9. Báze a dimenze

Báze a souřadnice

Cv. 9.1 Najděte bázi a určete dimenzi následujících vektorových prostorů:

(a) $\mathbb{R}^2$ nad $\mathbb{R}$,

(b) $\mathbb{C}^2$ nad $\mathbb{C}$,

(c) $\mathbb{C}^2$ nad $\mathbb{R}$,

(d) $\mathcal{P}^2$,

(e) $\mathbb{R}^{2\times 2}$ nad $\mathbb{R}$,

(f) prostor symetrických matic v $\mathbb{R}^{2\times 2}$ nad $\mathbb{R}$.

Řešení:

(a) Bázi tvoří například e_1, e_2 či jakékoli dva lineárně nezávislé vektory. Dimenze je tudíž 2.

(b) Bázi tvoří například e_1, e_2 či jakékoli dva lineárně nezávislé vektory. Dimenze je tudíž 2.

Tato vlastnost platí obecně. Je-li $\mathbb{T}$ těleso, pak vektorový prostor $\mathbb{T}^2$ nad $\mathbb{T}$ má dimenzi 2 a jeho bází je například kanonická báze e_1, e_2. Důkaz: vektory e_1, e_2 jsou zřejmě lineárně nezávislé a každý vektor $v = (v_1, v_2)^T \in \mathbb{T}$ lze napsat $v = v_1(1,0)^T + v_2(0,1)^T = v_1e_1 + v_2e_2$.

(c) Bázi tvoří například $e_1, e_2, (i,0)^T, (0,i)^T$. Dimenze je tudíž 4.

Důkaz. Nejprve ukážeme, že to jsou generátory. Každý vektor $v \in \mathbb{C}^2$ je tvaru $v = (a_1 + b_1 i, a_2 + b_2 i)^T$, kde $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$. Můžeme tento vektor tedy vyjádřit

$$v = a_1(1,0)^T + b_1(i,0)^T + a_2(0,1)^T + b_2(0,i)^T.$$

Lineární nezávislost. Uvažujme lineární kombinaci vektorů (s reálnými koeficienty!)

$$a_1(1,0)^T + b_1(i,0)^T + a_2(0,1)^T + b_2(0,i)^T = (0,0)^T, \quad a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}.$$

Rovnice lze ekvivalentně psát $(a_1 + b_1 i, a_2 + b_2 i)^T = (0,0)^T$ a je splněna právě tehdy, když $a_1 = b_1 = a_2 = b_2 = 0$.

(d) Bázi tvoří například $1, x, x^2$. Dimenze je tudíž 3.

(e) Bázi tvoří například $\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0&1\\0&0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0&0\\1&0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)$. Dimenze je tudíž 4.

(f) Bázi tvoří například $\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)$. Dimenze je tudíž 3.

Cv. 9.2 Zjistěte, zda $(-1,5,3)^T \in \operatorname{span}\{(1,2,2)^T, (4,1,3)^T\}$.

Pokud ano, tak určete souřadnice vektoru vzhledem k dané bázi.

Řešení:

Chceme vyjádřit vektor $v = (-1, 5, 3)^T$ jako lineární kombinaci vektorů $(1, 2, 2)^T$, $(4, 1, 3)^T$, čili

$$(-1, 5, 3)^T = \alpha(1, 2, 2)^T + \beta(4, 1, 3)^T.$$

To je vlastně soustava tří rovnic o dvou neznámých (α, β), kterou můžeme zapsat maticově

$$\left(\begin{array}{cc|r} 1 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 3 \end{array}\right).$$

Vyřešením soustavy zjistíme, že existuje jediné řešení $\alpha = 3$, $\beta = -1$. To jsou i hledané souřadnice $[v]_B = (3, -1)^T$.

Cv. 9.3 V prostoru $\mathcal{P}^2$ najděte souřadnice vektoru $x^2 + 2$ vzhledem k bázi $x^2 + 1$, $x - 2$, $2x^2 + x - 1$.

Řešení:
Postupujeme analogicky, jako v předchozí úloze. Chceme vyjádřit vektor $p(x) = x^2 + 2$ jako lineární kombinaci vektorů $x^2 + 1$, $x - 2$, $2x^2 + x - 1$, čili

$$x^2 + 2 = \alpha(x^2 + 1) + \beta(x - 2) + \gamma(2x^2 + x - 1).$$

Po úpravě

$$x^2 + 2 = (\alpha + 2\gamma)x^2 + (\beta + \gamma)x + (\alpha - 2\beta - \gamma).$$

To nám dá soustavu tří rovnic o třech neznámých, jejíž maticové vyjádření je

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 2 \end{array}\right).$$

Matice soustavy je regulární, a tudíž soustava má jediné řešení, a to $\alpha = 3$, $\beta = 1$, $\gamma = -1$. Hledané souřadnice jsou $[p(x)]_B = (3, 1, -1)^T$.

Cv. 9.4 Souřadnice vektoru v vzhledem k bázi $B = \{z_1, z_2, z_3, z_4\}$ jsou $[v]_B = (a_1, a_2, a_3, a_4)^T$. Určete souřadnice vektoru v vzhledem k bázi B', pokud

(a) $B' = \{z_4, z_3, z_2, z_1\}$,

(b) $B' = \{z_1 + z_4, z_2, z_3, z_4\}$,

(c) $B' = \{z_1 + z_4, z_2 + z_3, z_4, z_2\}$.

Řešení:
Souřadnice vektoru v vzhledem k bázi B' můžeme určit standardním způsobem, ale vzhledem k tomu, jak báze B' vypadá, tak souřadnice odvodíme přímo. K tomu nám pomůže fakt, že ze zadání víme $v = a_1z_1 + a_2z_2 + a_3z_3 + a_4z_4 = \sum_{i=1}^4 a_iz_i$.

(a) Protože můžeme psát $v = a_4z_4 + a_3z_3 + a_2z_2 + a_1z_1$, tak hledané souřadnice jsou$[v]_{B'} = (a_4, a_3, a_2, a_1)^T$.

(b) Chceme vyjádřit vektor jako

$$v = ?\,(z_1 + z_4) + \,?\,z_2 + \,?\,z_3 + \,?\,z_4,$$

přičemž víme

$$v = a_1 z_1 + a_2 z_2 + a_3 z_3 + a_4 z_4.$$

Zde se nabízí vhodně přičíst a odečíst hodnotu $a_1 z_4$ a vyjádřit vektor jako

$$v = a_1(z_1 + z_4) + a_2 z_2 + a_3 z_3 + (a_4 - a_1) z_4,$$

z čehož $[v]_{B'} = (a_1, a_2, a_3, a_4 - a_1)^T$.

(c) Analogickou úvahou vyjádříme vektor jako

$$\begin{aligned} v &= a_1(z_1 + z_4) + a_2 z_2 + a_3 z_3 + (a_4 - a_1) z_4 \\ &= a_1(z_1 + z_4) + a_3 z_3 + (a_4 - a_1) z_4 + a_2 z_2 \\ &= a_1(z_1 + z_4) + a_3(z_2 + z_3) + (a_4 - a_1) z_4 + (a_2 - a_3) z_2, \end{aligned}$$

z čehož $[v]_{B'} = (a_1, a_3, a_4 - a_1, a_2 - a_3)^T$.

Dimenze

Cv. 9.5 Najděte všechny podprostory vektorového prostoru $\mathbb{R}^2$ nad $\mathbb{R}$.

<u>Řešení:</u>
Budeme postupovat výčtem možných hodnot pro dimenzi podprostoru. Dimenzi 0 má pouze podprostor $\{o\}$, dimenzi 1 mají přímky procházející počátkem (těch je nekonečně mnoho), a dimenzi 2 má jen celý prostor $\mathbb{R}^2$.

Cv. 9.6 Určete počet podprostorů $\mathbb{Z}_p^2$ nad $\mathbb{Z}_p$.

<u>Řešení:</u>
Opět rozdělíme podprostory podle jejich dimenze. Dimenzi 0 má pouze podprostor $\{o\}$. Dimenzi 2 má jen celý prostor $\mathbb{Z}_p^2$. Dimenzi 1 mají přímky procházející počátkem. Přímka má normovaný směr buď $(0, 1)$ nebo $(1, a)$, $a \in \mathbb{Z}_p$. Celkem dostáváme, že počet podprostorů je $p + 3$.

Cv. 9.7 Buďte U, V podprostory vektorového prostoru W a nechť $\dim U = 7$, $\dim V = 8$, $\dim W = 13$.

(a) Odhadněte zdola a shora hodnotu $\dim(U + V)$ a najděte konkrétní příklady, kdy se obě meze nabydou.

(b) Odhadněte zdola a shora hodnotu $\dim(U \cap V)$ a opět ukažte, že je odhad těsný.

<u>Řešení:</u>

(a) Protože oba prostory U, V jsou podprostory prostoru $U + V$, musí platit $\dim U \leq \dim(U + V)$ a $\dim V \leq \dim(U + V)$. To nám dává první odhad zdola $\dim(U + V) \geq 8$. Zároveň není těžké nahlédnout, že je odhad těsný, to znamená, že se někdy může nabýt jako rovnost. Uvažujme například prostor

$W = \mathbb{R}^{13}$ a jeho podprostory $U = \operatorname{span}\{e_1, \dots, e_7\}$, $V = \operatorname{span}\{e_1, \dots, e_8\}$. Potom $U + V = V$, čili $\dim(U + V) = \dim V = 8$.

Pro odhad shora stačí využít toho, že oba prostory U, V jsou podprostory prostoru W. Proto musí platit $\dim(U + V) \leq \dim W$. To vede na odhad $\dim(U+V) \leq 13$. I tento odhad je těsný. Uvažujme opět prostor $W = \mathbb{R}^{13}$, ale tentokrát s podprostory $U = \operatorname{span}\{e_1, \dots, e_7\}$, $V = \operatorname{span}\{e_6, \dots, e_{13}\}$. V tomto případě $U + V = W$, a tak $\dim(U + V) = \dim W = 13$.

(b) Zde využijeme větu o dimenzi spojení a průniku podprostorů, která říká

$$\dim U + \dim V = \dim(U + V) + \dim(U \cap V).$$

V našem případě má věta tvar

$$\dim(U \cap V) = \dim U + \dim V - \dim(U + V) = 15 - \dim(U + V).$$

Pro odhady zdola a shora využijme předchozí odhady na $\dim(U + V)$ a dostaneme

$$\dim(U \cap V) = 15 - \dim(U + V) \leq 15 - 8 = 7$$

a

$$\dim(U \cap V) = 15 - \dim(U + V) \leq 15 - 13 = 2.$$

Odhady jsou opět těsné, o čemž nás přesvědčí stejné příklady jako v předchozím bodu.

Direktní součet

Cv. 9.8 Nechť U, V jsou podprostory vektorového prstoru W. Dokažte, že pokud $U \cap V = \{o\}$, pak každý vektor $w \in U+V$ lze zapsat jediným způsobem ve tvaru $w = u+v$, kde $u \in U$ a $v \in V$.

Řešení:

Budeme postupovat sporem. Předpokládejme pro spor, že existují dvě různá vyjádření součtu $w = u + v = u' + v'$, kde $u, u' \in U$ a $v, v' \in V$. Pak ale vektor $z := u - u' = v - v'$ je nenulový a nachází se v průniku $U \cap V$, což je spor s předpokladem.

Cv. 9.9 Buď W direktním součtem svých podprostorů U, V. Dokažte: Je-li $u_1, \dots, u_m$ báze U a $v_1, \dots, v_n$ báze V, pak $u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_n$ je báze W.

Řešení:

Protože vektory $u_1, \dots, u_m$ generují podprostor U a vektory $v_1, \dots, v_n$ generují podprostor V, tak vektory $u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_n$ musí generovat prostor $W = U + W$.

Z předpokladu (a definice direktního součtu podprostorů) je $U \cap V = \{o\}$, čili $\dim(U \cap V) = 0$. Podle věty o dimenzi spojení a průniku podprostorů máme

$$m + n = \dim U + \dim V = \dim(U + V) + \dim(U \cap V) = \dim(U + V) = \dim W.$$

Prostor W má tedy dimenzi $m+n$. Ale zároveň víme, že množina jeho generátorů $u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_n$ má velikost také $m + n$. Proto musí tyto generátory tvořit bázi prostoru W.

10. Maticové prostory

Cv. 10.1 Buď

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Postupně nad tělesy $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}_5$ a $\mathbb{Z}_7$ rozhodněte, zda platí:

(a) $v \in \mathrm{Ker}(A)$,

(b) $v \in \mathcal{S}(A)$.

Řešení:

Z definice jádra a sloupcového prostoru matice platí

$$\begin{aligned} \mathrm{Ker}(A) &= \{x \in \mathbb{T}^n;\ Ax = 0\}, \\ \mathcal{S}(A) &= \mathrm{span}\{A_{*1}, \ldots, A_{*n}\} = \{Ax;\ x \in \mathbb{T}^n\}, \end{aligned}$$

stačí tedy ověřit, zda vektor $v = (1,2)^T$ řeší soustavu $Ax = 0$ nad daným tělesem a zda platí $Ax = v$ pro nějaké $x \in \mathbb{T}^2$.

Nad tělesem $\mathbb{R}$*:*

(a) vektor v nepatří do jádra matice A, protože

$$Av = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

(b) vektor v patří do sloupcového prostoru matice A, protože soustava

$$(A \mid v) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{3}{5} \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} \end{array}\right)$$

má řešení, konkrétně platí $(1,2)^T = \frac{3}{5}(1,3)^T + \frac{1}{5}(2,1)^T$.

Nad tělesem $\mathbb{Z}_5$*:*

(a) vektor v patří do $\mathrm{Ker}(A)$, protože

$$Av = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

(b) vektor v nepatří do $\mathcal{S}(A)$, protože soustava

$$(A \mid v) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{array}\right)$$

nemá nad tělesem $\mathbb{Z}_5$ řešení.

Nad tělesem $\mathbb{Z}_7$*:*

(a) vektor v nepatří $\mathrm{Ker}(A)$, protože

$$Av = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

(b) vektor v patří do $\mathcal{S}(A)$, protože soustava

$$(A \mid v) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

má nad tělesem $\mathbb{Z}_7$ řešení a platí $(1,2)^T = 2(1,3)^T + 3(2,1)^T$.

Cv. 10.2 Najděte báze prostorů $\mathcal{R}(A)$, $\mathcal{S}(A)$ a $\mathrm{Ker}(A)$ pro matici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 6 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Řešení:

Převedeme matici A do redukovaného odstupňovaného tvaru $\mathrm{RREF}(A)$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 6 & 1 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{RREF}(A).$$

Bázi řádkového prostoru $\mathcal{R}(A)$ tvoří (například) nenulové vektory v řádcích výsledné matice, tedy vektory $(1,2,0,1)^T$, $(0,0,1,1)^T$. Důvodem je, že elementární řádkové úpravy nemění řádkový prostor matice, a tedy $\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(\mathrm{RREF}(A))$. Najít bázi řádkového prostoru matice $\mathrm{RREF}(A)$ je pak jednoduché – jsou to všechny nenulové řádky.

Bázi sloupcového prostoru můžeme vybrat z původních sloupců matice A, které odpovídají bázickým sloupcům odstupňovaného tvaru. Bázické sloupce jsou první a třetí, tedy vektory $(1,2,3)^T$ a $(2,1,1)^T$ tvoří bázi $\mathcal{S}(A)$. Zdůvodnění je teď jiné, než v případě řádkového prostoru, protože elementární řádkové úpravy obecně mohou změnit sloupový prostor matice. Co ale elementární řádkové úpravy nemění, je lineární závislost a nezávislost mezi sloupci. Tudíž můžeme tvrdit: bázi $\mathcal{S}(\mathrm{RREF}(A)$ tvoří první a třetí sloupec matice $\mathrm{RREF}(A)$, proto bázi $\mathcal{S}(A)$ tvoří první a třetí sloupec matice A.

Bázi jádra matice A získáme z řešení soustavy $Ax = 0$. Množinu všech řešení této soustavy můžeme vyjádřit pomocí nebázických proměnných x_2, x_4 ve tvaru

$$(-2x_2 - x_4, x_2, -x_4, x_4)^T = (-2,1,0,0)^T x_2 + (-1,0,-1,1)^T x_4.$$

Bázi $\mathrm{Ker}(A)$ tedy tvoří např. vektory $(-2,1,0,0)^T$, $(-1,0,-1,1)^T$.

Cv. 10.3 Najděte matici A takovou, že

(a) $\mathcal{R}(A)$ obsahuje vektory $(1,1)^T, (1,2)^T$ a $\mathcal{S}(A)$ obsahuje $(1,0,0)^T$, $(0,0,1)^T$,

(b) bázi $\mathcal{R}(A)$ i $\mathcal{S}(A)$ tvoří vektor $(1,1,1)^T$ a báze $\mathrm{Ker}(A)$ je $(1,-2,1)^T$.

Řešení:

(a) Tento příklad je zaměřený na kreativitu a ne na postup podle šablony. Proto popíšeme jen základní myšlenky, které pomohou hledanou matice najít. Ze zadaných vektorů v řádkovém a sloupcovém prostoru vidíme, že hledáme matici 3×2. Dále, z podmínek na řádkový prostor dostáváme $\mathcal{R}(A) = \mathbb{R}^2$, neboli stačí, aby matice A měla lineárně nezávislé sloupce. Pokud dáme vektory z podmínky na $\mathcal{S}(A)$ přímo do sloupců matice A, získáme požadovanou matici

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Hledaná matice ale není zdaleka jednoznačná. Požadovanou vlastnost splňují další matice, jako například

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) V tomto případě hledáme matici 3×3, pro kterou platí

$$\dim \mathcal{R}(A) = \dim \mathcal{S}(A) = \operatorname{rank}(A) = 1, \quad \dim \operatorname{Ker}(A) = 1.$$

Z věty o dimenzi jádra a hodnosti matice ale víme, že pro každou matici $A \in \mathbb{T}^{m \times n}$ musí platit vztah

$$\dim \operatorname{Ker}(A) + \operatorname{rank}(A) = n.$$

V našem případě dostáváme $1 + 1 = \dim \operatorname{Ker}(A) + \operatorname{rank}(A) = 3$. Matice splňující požadované vlastnosti tedy neexistuje.

Cv. 10.4 Rozhodněte, zda pro matice $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ platí

(a) $\mathcal{S}(A) = \mathcal{S}(B)$ implikuje $\operatorname{RREF}(A) = \operatorname{RREF}(B)$,

(b) $\operatorname{RREF}(A) = \operatorname{RREF}(B)$ implikuje $\mathcal{S}(A) = \mathcal{S}(B)$.

Řešení:

(a) Tvrzení neplatí. Například matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

mají stejný sloupcový prostor

$$\operatorname{span}\{(1,0)^T, (0,0)^T\} = \mathcal{S}(A) = \mathcal{S}(B) = \operatorname{span}\{(0,0)^T, (1,0)^T\},$$

ale jejich redukované odstupňované tvary jsou různé (obě matice jsou v RREF).

(b) Neplatí ani tato opačná implikace. Například pro matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

máme $\operatorname{RREF}(A) = \operatorname{RREF}(B) = A$, ale přitom

$$\operatorname{span}\left\{(1,0)^T, (0,0)^T\right\} = \mathcal{S}(A) \neq \mathcal{S}(B) = \operatorname{span}\left\{(0,1)^T, (0,0)^T\right\}.$$

Cv. 10.5 S využitím maticových prostorů určete dimenzi prostoru

$$V = \{x \in \mathbb{R}^n;\ x_1 + \ldots + x_n = 0\}.$$

Řešení:

Prostor V odpovídá množině řešení soustavy

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{array}\right),$$

to znamená jádru matice $A = \begin{pmatrix} 1\,1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ Tato matice má rozměr $1 \times n$ a má hodnost 1. Pro dimenzi jádra použijeme vzoreček (věta o dimenzi jádra a hodnosti matice):

$$\dim V = \dim \operatorname{Ker}(A) = n - \operatorname{rank}(A) = n - 1.$$

Závěr: Hledaná dimenze je tedy $n + 1$.

Kdybychom chtěli najít i bázi, tak jednoduše vyřešíme soustavu $Ax = 0$ pomocí Gaussovy eliminace. Bázi tak tvoří například vektory $(1, -1, 0 \ldots, 0)^T$, $(0, 1, -1, 0 \ldots, 0)^T$, $\ldots$, $(0 \ldots, 0, 1, -1)^T$.

Cv. 10.6 Z vektorů vyberte bázi prostoru $V = \operatorname{span}\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ a pro ostatní vektory najděte souřadnice vůči této bázi:

$$v_1 = (3, 1, 5, 4)^T,\ v_2 = (2, 2, 3, 3)^T,\ v_3 = (1, -1, 2, 1)^T,\ v_4 = (1, 3, 1, 1)^T.$$

Řešení:

Zapíšeme jednotlivé vektory do sloupců matice A, kterou převedeme do redukovaného odstupňovaného tvaru

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{RREF}(A).$$

Připomeňme, že elementární řádkové úpravy zachovávají lineární závislost a nezávislost mezi sloupci, a to dokonce i konkrétní lineární kombinace. Tudíž z matice $\operatorname{RREF}(A)$ snadno vyčteme nejen bázi prostoru $\mathcal{S}(A) = V$, ale i hledané souřadnice.

Vidíme, že bázické sloupce jsou první, druhý a čtvrtý. Bázi prostoru $\mathcal{S}(A) = V$ tedy tvoří původní vektory $v_1 = (3, 1, 5, 4)^T$, $v_2 = (2, 2, 3, 3)^T$ a $v_4 = (1, 3, 1, 1)^T$.

Ze třetího sloupce upravené matice $\operatorname{RREF}(A)$ dostaneme souřadnice vektoru v_3 vzhledem k bázi $B = \{v_1, v_2, v_4\}$, neboť platí

$$v_3 = (1, -1, 2, 1)^T = 1 \cdot (3, 1, 5, 4)^T + (-1) \cdot (2, 2, 3, 3)^T,$$

a tedy $[v_3]_B = (1, -1, 0)^T$.

Cv. 10.7 Určete, jaký je vztah mezi prostory $\operatorname{Ker}(AB)$ a $\operatorname{Ker}(B)$ pro matice

(a) $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$,

(b) $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ regulární, $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$.

Řešení:

(a) Nechť $x \in \mathrm{Ker}(B)$, pak z definice jádra platí $Bx = o$. Vektor x patří také do jádra matice AB, protože

$$(AB)x = A(Bx) = Ao = o,$$

dostaneme tedy inkluzi $\mathrm{Ker}(B) \subseteq \mathrm{Ker}(AB)$. Obrácená inkluze obecně neplatí, např. pro $A = 0_n$ a $B = I_n$ je vektor $y = (1, 0, \ldots, 0)^T$ v jádru matice AB, ale nikoliv v jádru matice B.

(b) Nahlédneme, že pro regulární matici A platí také inkluze $\mathrm{Ker}(AB) \subseteq \mathrm{Ker}(B)$, a tedy můžeme psát $\mathrm{Ker}(AB) = \mathrm{Ker}(B)$.

Důkaz. Nechť $x \in \mathrm{Ker}(AB)$, potom $(AB)x = o$. Z regularity matice A existuje inverzní matice A^{-1}, pro kterou platí

$$Bx = (A^{-1}A)Bx = A^{-1}((A\ B)x) = A^{-1}o\ = o,$$

z čehož plyne $x \in \mathrm{Ker}(B)$.

Cv. 10.8 Rozhodněte, zda platí $\mathrm{rank}(A + B) \leq \mathrm{rank}(A) + \mathrm{rank}(B)$ pro $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$.

(*Hint:* Jaký je vztah mezi prostory $\mathcal{S}(A + B)$ a $\mathcal{S}(A) + \mathcal{S}(B)$?)

Řešení:

Uvažujme prostor generovaný sjednocením sloupců matice A a sloupců matice B, tedy spojení $\mathcal{S}(A) + \mathcal{S}(B)$. Dimenze tohoto prostoru je

$$\dim(\mathcal{S}(A) + \mathcal{S}(B)) \leq \dim \mathcal{S}(A) + \dim \mathcal{S}(B) = \mathrm{rank}(A) + \mathrm{rank}(B).$$

Dále, prostor $\mathcal{S}(A) + \mathcal{S}(B)$ obsahuje všechny vektory generované sloupci matice $A + B$, tedy $\mathcal{S}(A + B)$ je podprostorem $\mathcal{S}(A) + \mathcal{S}(B)$. Platí proto

$$\mathrm{rank}(A + B) = \dim \mathcal{S}(A + B) \leq \dim(\mathcal{S}(A) + \mathcal{S}(B)) \leq \mathrm{rank}(A) + \mathrm{rank}(B).$$