

9. Báze a dimenze

Báze a souřadnice

Cv. 9.1 Najděte bázi a určete dimenzi následujících vektorových prostorů:

- (a) \mathbb{R}^2 nad \mathbb{R} ,
- (b) \mathbb{C}^2 nad \mathbb{C} ,
- (c) \mathbb{C}^2 nad \mathbb{R} ,
- (d) \mathcal{P}^2 ,
- (e) $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ nad \mathbb{R} ,
- (f) prostor symetrických matic v $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ nad \mathbb{R} .

Cv. 9.2 Zjistěte, zda $(-1, 5, 3)^T \in \text{span}\{(1, 2, 2)^T, (4, 1, 3)^T\}$.

Pokud ano, tak určete souřadnice vektoru vzhledem k dané bázi.

Cv. 9.3 V prostoru \mathcal{P}^2 najděte souřadnice vektoru $x^2 + 2$ vzhledem k bázi $x^2 + 1, x - 2, 2x^2 + x - 1$.

Cv. 9.4 Souřadnice vektoru v vzhledem k bázi $B = \{z_1, z_2, z_3, z_4\}$ jsou $[v]_B = (a_1, a_2, a_3, a_4)^T$. Určete souřadnice vektoru v vzhledem k bázi B' , pokud

- (a) $B' = \{z_4, z_3, z_2, z_1\}$,
- (b) $B' = \{z_1 + z_4, z_2, z_3, z_4\}$,
- (c) $B' = \{z_1 + z_4, z_2 + z_3, z_4, z_2\}$.

Dimenze

Cv. 9.5 Najděte všechny podprostory vektorového prostoru \mathbb{R}^2 nad \mathbb{R} .

Cv. 9.6 Určete počet podprostorů \mathbb{Z}_p^2 nad \mathbb{Z}_p .

Cv. 9.7 Buďte U, V podprostory vektorového prostoru W a necht' $\dim U = 7, \dim V = 8, \dim W = 13$.

- (a) Odhadněte zdola a shora hodnotu $\dim(U+V)$ a najděte konkrétní příklady, kdy se obě meze nabydou.
- (b) Odhadněte zdola a shora hodnotu $\dim(U \cap V)$ a opět ukažte, že je odhad těsný.

Direktní součet

Cv. 9.8 Necht' U, V jsou podprostory vektorového prostoru W . Dokažte, že pokud $U \cap V = \{o\}$, pak každý vektor $w \in U+V$ lze zapsat jediným způsobem ve tvaru $w = u+v$, kde $u \in U$ a $v \in V$.

Cv. 9.9 Buď W direktním součtem svých podprostorů U, V . Dokažte: Je-li u_1, \dots, u_m báze U a v_1, \dots, v_n báze V , pak $u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_n$ je báze W .

10. Maticové prostory

Cv. 10.1 Buď

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Postupně nad tělesy \mathbb{R} , \mathbb{Z}_5 a \mathbb{Z}_7 rozhodněte, zda platí:

- (a) $v \in \text{Ker}(A)$,
- (b) $v \in \mathcal{S}(A)$.

Cv. 10.2 Najděte báze prostorů $\mathcal{R}(A)$, $\mathcal{S}(A)$ a $\text{Ker}(A)$ pro matici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 6 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Cv. 10.3 Najděte matici A takovou, že

- (a) $\mathcal{R}(A)$ obsahuje vektory $(1, 1)^T$, $(1, 2)^T$ a $\mathcal{S}(A)$ obsahuje $(1, 0, 0)^T$, $(0, 0, 1)^T$,
- (b) bázi $\mathcal{R}(A)$ i $\mathcal{S}(A)$ tvoří vektor $(1, 1, 1)^T$ a báze $\text{Ker}(A)$ je $(1, -2, 1)^T$.

Cv. 10.4 Rozhodněte, zda pro matice $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ platí

- (a) $\mathcal{S}(A) = \mathcal{S}(B)$ implikuje $\text{RREF}(A) = \text{RREF}(B)$,
- (b) $\text{RREF}(A) = \text{RREF}(B)$ implikuje $\mathcal{S}(A) = \mathcal{S}(B)$.

Cv. 10.5 S využitím maticových prostorů určete dimenzi prostoru

$$V = \{x \in \mathbb{R}^n; x_1 + \dots + x_n = 0\}.$$

Cv. 10.6 Z vektorů vyberte bázi prostoru $V = \text{span}\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ a pro ostatní vektory najděte souřadnice vůči této bázi:

$$v_1 = (3, 1, 5, 4)^T, \quad v_2 = (2, 2, 3, 3)^T, \quad v_3 = (1, -1, 2, 1)^T, \quad v_4 = (1, 3, 1, 1)^T.$$

Cv. 10.7 Určete, jaký je vztah mezi prostory $\text{Ker}(AB)$ a $\text{Ker}(B)$ pro matice

- (a) $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$,
- (b) $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ regulární, $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$.

Cv. 10.8 Rozhodněte, zda platí $\text{rank}(A + B) \leq \text{rank}(A) + \text{rank}(B)$ pro $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

(*Hint*: Jaký je vztah mezi prostory $\mathcal{S}(A + B)$ a $\mathcal{S}(A) + \mathcal{S}(B)$?)