11. Lineární zobrazení, matice vzhledem ke kanonické bázi

Definice lineárního zobrazení

Cv. 11.1 Rozhodněte, zda následující zobrazení $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ jsou lineární:

(a) $f(x, y) = (x, y + 3)^T$,
(b) $f(x, y) = (x + 2y, y)^T$,
(c) $f(x, y) = (0, 0)^T$,
(d) $f(x, y) = (x^2, y)^T$.

Cv. 11.2 Rozhodněte, zda následující zobrazení z prostoru $\mathbb{R}^{n\times n}$ jsou lineární:

(a) $f(A) = A^T$,
(b) $f(A) = I_n$,
(c) $f(A) = A^2$,
(d) $f(A) = a_{11}$,
(e) $f(A) = \mathrm{RREF}(A)$,

Matice lineárního zobrazení vzhledem ke kanonické bázi

Cv. 11.3 Pro lineární zobrazení $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dané přepisem $f(x, y) = (x + y,\, x - y)^T$ vypočtěte matici lineárního zobrazení vůči kanonické bázi.

Cv. 11.4 Najděte obraz vektoru $v = (-1, 1, 2)^T$ při lineárním zobrazení $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definovaném:

$$f(1, 0, 0) = (1, 1)^T,\ f(0, 1, 0) = (-1, 2)^T,\ f(0, 0, 1) = (0, 0)^T.$$

Cv. 11.5 Najděte matici následujících lineárních zobrazení v rovině $\mathbb{R}^2$ vzhledem ke kanonické bázi:

(a) Otočení o 90° proti směru hodinových ručiček.
(b) Projekce na osu x.
(c) Otočení o 90° proti směru hodinových ručiček a pak projekce na osu x.
(d) Projekce na osu x a pak otočení o 90° proti směru hodinových ručiček.

12. Matice přechodu a matice lineárního zobrazení

Matice přechodu

Cv. 12.1 V prostoru $\mathbb{R}^3$ uvažujme dvě báze

$$B_1 = \{(1,1,1)^T, (0,1,-1)^T, (2,0,1)^T\}, \quad B_2 = \{(3,2,2)^T, (1,0,1)^T, (1,2,2)^T\}.$$

(a) Sestrojte matici přechodu od báze B_1 do kanonické.

(b) Sestrojte matici přechodu od kanonické báze do báze B_1.

(c) Určete souřadnice vektoru $(1,2,0)^T$ vzhledem k bázi B_1.

(d) Sestrojte matici přechodu od báze B_2 do báze B_1.

Cv. 12.2 Najděte matici přechodu od báze b_1, b_2, b_3, b_4 k bázi b_2, b_4, b_1, b_3.

Cv. 12.3 Určete matici přechodu od báze B_1 do báze B_2 prostoru $\mathcal{P}^2$, je-li

$$B_1 = \{x^2+1, x^2-3x+1, x^2+x+3\}, \quad B_2 = \{x^2+2x+1, 2x^2+1, x^2-x\}.$$

Matice obecného lineárního zobrazení

Cv. 12.4 Uvažujme lineární zobrazení $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ zadané obrazy kanonické báze:

$$f(e_1) = (1,-1,1)^T, \quad f(e_2) = (0,1,1)^T.$$

Uvažujme dvě báze

$$B_1 = \{(1,-1)^T, (1,1)^T\}, \quad B_2 = \{(1,-1,1)^T, (1,0,1)^T, (0,1,1)^T\}.$$

Spočítejte:

(a) matici zobrazení vzhledem ke kanonickým bázím, tj. ${}_{\mathrm{kan}}[f]_{\mathrm{kan}}$.

(b) matici zobrazení od B_1 ke kanonické bázi, tj. ${}_{\mathrm{kan}}[f]_{B_1}$.

(c) matici zobrazení od kanonické bázi k B_2, tj. ${}_{B_2}[f]_{\mathrm{kan}}$.

(d) matici zobrazení od B_1 k B_2, tj. ${}_{B_2}[f]_{B_1}$.

Cv. 12.5 Uvažujme dvě lineární zobrazení $f, g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ zadaná maticemi

$${}_B[f]_{\mathrm{kan}} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad {}_B[g]_{\mathrm{kan}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

kde $B = \{(1,0,-1)^T, (1,1,0)^T, (1,-2,1)^T\}$. Určete ${}_{\mathrm{kan}}[g \circ f]_{\mathrm{kan}}$.

Cv. 12.6 Mějme lineární zobrazení $f\colon U \to V$ dané maticovým předpisem $A = {}_{B_V}[f]_{B_U}$. Ukažte, že matice $\mathrm{RREF}(A)$ reprezentuje stejné zobrazení, ale vzhledem k jiným bázím.

Cv. 12.7 Známe matici ${}_B[f]_B$ lineárního zobrazení $f\colon U \to U$. Jak můžeme určit matici ${}_{B'}[f]_{B'}$ vůči bázi B'?

Cv. 12.8 Mějme matici M lineárního zobrazení. Diskutujte, kolik lineárních zobrazení popisuje matice M?