12. Matice přechodu a matice lineárního zobrazení

Matice přechodu

Cv. 12.1 V prostoru $\mathbb{R}^3$ uvažujme dvě báze

$$B_1 = \{(1,1,1)^T, (0,1,-1)^T, (2,0,1)^T\}, \quad B_2 = \{(3,2,2)^T, (1,0,1)^T, (1,2,2)^T\}.$$

(a) Sestrojte matici přechodu od báze B_1 do kanonické.

(b) Sestrojte matici přechodu od kanonické báze do báze B_1.

(c) Určete souřadnice vektoru $(1,2,0)^T$ vzhledem k bázi B_1.

(d) Sestrojte matici přechodu od báze B_2 do báze B_1.

Řešení:
Obecně má matice přechodu od báze $B_1 = \{b_1, \ldots, b_n\}$ do báze $B_2 = \{c_1, \ldots, c_n\}$ předpis

$$_{B_2}[id]_{B_1} = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ [b_1]_{B_2} & [b_2]_{B_2} & \ldots & [b_n]_{B_2} \\ | & | & & | \end{pmatrix}.$$

(a) Chceme matici přechodu $_{\text{kan}}[id]_{B_1}$. Podle předpisu výše tedy musíme zkonstruovat matici

$$\begin{pmatrix} | & | & & | \\ [b_1]_{\text{kan}} & [b_2]_{\text{kan}} & \ldots & [b_n]_{\text{kan}} \\ | & | & & | \end{pmatrix}.$$

Stačí tedy pouze vzít bázické vektory B_1 a dát je do sloupečků matice,

$$_{\text{kan}}[id]_{B_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Chceme matici přechodu $_{B_1}[id]_{\text{kan}}$. Úlohu můžeme vyřešit dvěma způsoby. První možností je postupovat podle předpisu výše, tedy zkonstruovat matici

$$\begin{pmatrix} | & | & & | \\ [e_1]_{B_1} & [e_2]_{B_1} & \ldots & [e_n]_{B_1} \\ | & | & & | \end{pmatrix}.$$

To odpovídá hledání koeficientů vektorů e_i při bázi B_1, tedy problému, který umíme převést na hledání řešení soustavy lineárních rovnic pro tři vektory pravých stran zároveň, konkrétně

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Jednotlivými řešeními této soustavy jsou vektory $\frac{1}{3}(-1,1,2)^T$, $\frac{1}{3}(2,1,-1)^T$ a $\frac{1}{3}(2,-2,-1)^T$. Dostáváme tedy matici

$$ {}_{B_1}[id]_{\mathrm{kan}} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}. $$

Druhý způsob by bylo využít vztahu $({}_{B_1}[id]_{B_2})^{-1} = {}_{B_2}[id]_{B_1}$. Všimněme si ovšem, že výpočet inverze vede v našem případě na řešení stejné soustavy rovnic, jako při prvním způsobu výpočtu.

(c) Opět můžeme problém řešit dvěma způsoby. První by byl přímo z definice hledat koeficienty zadaného vektoru vůči bázi, který vede na řešení soustavy

$$ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right). $$

V našem případě bude jednodušší využít vztahu $[x]_{B_1} = {}_{B_1}[id]_{\mathrm{kan}} \cdot [x]_{\mathrm{kan}} = {}_{B_1}[id]_{\mathrm{kan}} \cdot x$, tedy

$$ \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. $$

(d) Chceme matici ${}_{B_1}[id]_{B_2}$. Ukážeme dva postupy.

První způsob je z definice matice zobrazení. Z předpisu výše musíme zkonstruovat matici

$$ \begin{pmatrix} | & | & & | \\ [c_1]_{B_1} & [c_2]_{B_1} & \dots & [c_n]_{B_1} \\ | & | & & | \end{pmatrix}. $$

Podobně jako v podúloze (b) vede tento problém na hledání řešení soustavy lineárních rovnic pro tři vektory pravých stran zároveň, konkrétně

$$ \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right). $$

Jednotlivými řešeními jsou vektory $\frac{1}{3}(5,1,2)^T$, $\frac{1}{3}(1,-1,1)^T$ a $\frac{1}{3}(7,-1,-2)^T$. Dostáváme tedy matici

$$ \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5 & 1 & 7 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}. $$

Druhý způsob využívá toho, že už známe konkrétní hodnoty matice ${}_{B_1}[id]_{\mathrm{kan}}$. Můžeme pak snadno spočítat

$$ \begin{aligned} {}_{B_1}[id]_{B_2} &= {}_{B_1}[id]_{\mathrm{kan}} \cdot {}_{\mathrm{kan}}[id]_{B_2} \\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5 & 1 & 7 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}. \end{aligned} $$

Cv. 12.2 Najděte matici přechodu od báze b_1, b_2, b_3, b_4 k bázi b_2, b_4, b_1, b_3.

Řešení:
Matici přechodu bychom mohli nalézt stejným způsobem, jako v předchozí úloze. Alternativně nám stačí si uvědomit, že jediné, co se na bázi mění je pořadí vektorů, tedy v důsledku toho i pořadí souřadnic vektorů. Zatímco tedy původně byly souřadnice vektorů b_1, b_2, b_3, b_4 vůči první bázi vektory

$$(1,0,0,0)^T, (0,1,0,0)^T, (0,0,1,0)^T, (0,0,0,1)^T,$$

vůči druhé bázi dostáváme vektory

$$(0,0,1,0)^T, (1,0,0,0)^T, (0,0,0,1)^T, (0,1,0,0)^T.$$

Matice přechodu bude mít proto předpis

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Cv. 12.3 Určete matici přechodu od báze B_1 do báze B_2 prostoru $\mathcal{P}^2$, je-li

$$B_1 = \{x^2+1, x^2-3x+1, x^2+x+3\}, \quad B_2 = \{x^2+2x+1, 2x^2+1, x^2-x\}.$$

Řešení:
Postup je úplně stejný jako v předchozích úlohách. Hledáme souřadnice bázických vektorů B_1 vůči bázi B_2. Pro vektor x^2+1 řešíme

$$x^2+1 = \alpha_1(x^2+2x+1) + \alpha_2(2x^2+1) + \alpha_3(x^2-x).$$

Dva polynomy se rovnají, pokud se rovnají koeficienty u jednotlivých mocnin x, rovnice je tedy ekvivalentní soustavě

$$\begin{aligned} \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 &= 1, \\ 2\alpha_1 - \alpha_3 &= 0, \\ \alpha_1 + \alpha_2 &= 1. \end{aligned}$$

Ta má řešení $(-1,2,-2)^T$. Obdobně lze spočítat souřadnice $[x^2-3x+1]_{B_2} = (-4,5,-5)^T$ a $[x^2+x+3]_{B_2} = (-4,7,-9)^T$. Dostáváme matici

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -4 & -4 \\ 2 & 5 & 7 \\ -2 & -5 & -9 \end{pmatrix}.$$

Všechna tři řešení můžeme opět spočítat naráz pomocí jedné soustavy se třemi pravými stranami. Pokud tedy rozšířenou matici

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 0 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right).$$

převedeme na RREF tvar $(I_3 \mid A)$, potom v pravé části vyčteme hledanou matici A.

Matice obecného lineárního zobrazení

Cv. 12.4 Uvažujme lineární zobrazení $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ zadané obrazy kanonické báze:

$$f(e_1) = (1,-1,1)^T, \quad f(e_2) = (0,1,1)^T.$$

Uvažujme dvě báze

$$B_1 = \{(1,-1)^T, (1,1)^T\}, \quad B_2 = \{(1,-1,1)^T, (1,0,1)^T, (0,1,1)^T\}.$$

Spočítejte:

(a) matici zobrazení vzhledem ke kanonickým bázím, tj. ${}_{\mathrm{kan}}[f]_{\mathrm{kan}}$.

(b) matici zobrazení od B_1 ke kanonické bázi, tj. ${}_{\mathrm{kan}}[f]_{B_1}$.

(c) matici zobrazení od kanonické bázi k B_2, tj. ${}_{B_2}[f]_{\mathrm{kan}}$.

(d) matici zobrazení od B_1 k B_2, tj. ${}_{B_2}[f]_{B_1}$.

<u>Řešení</u>:

Obecně má maticová reprezentace zobrazení $f\colon U \to V$ od báze $B_U = \{u_1, \dots, u_n\}$ do báze $B_V = \{v_1, \dots, v_m\}$ předpis

$${}_{B_2}[f]_{B_1} = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ [f(u_1)]_{B_V} & [f(u_2)]_{B_V} & \dots & [f(u_n)]_{B_V} \\ | & | & & | \end{pmatrix}.$$

(a) Chceme matici ${}_{kan}[f]_{kan}$, podle předpisu výše tedy musíme zkonstruovat

$$\begin{pmatrix} | & | \\ [f(e_1)]_{\mathrm{kan}} & [f(e_2)]_{\mathrm{kan}} \\ | & | \end{pmatrix}.$$

Sloupce $[f(e_i)]_{kan} = f(e_i)$ dostáváme přímo ze zadání. Výsledná matice má proto tvar

$${}_{\mathrm{kan}}[f]_{\mathrm{kan}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Chceme matici ${}_{\mathrm{kan}}[f]_{B_1}$, podle předpisu výše tedy musíme zkonstruovat

$$\left(\left[f\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right]_{\mathrm{kan}} \quad \left[f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right]_{\mathrm{kan}} \right).$$

Z vlastností lineárního zobrazení dostáváme

$$f\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = f(e_1) - f(e_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = f(e_1) + f(e_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Výsledná matice má tedy tvar

$$_{\text{kan}}[f]_{B_1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Alternativně můžeme hledanou matici dostat rozdělením na jednodušší části s využitím matice složeného zobrazení:

$$_{\text{kan}}[f]_{B_1} = {}_{\text{kan}}[f]_{\text{kan}} \cdot {}_{\text{kan}}[id]_{B_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(c) Chceme matici $_{B_2}[f]_{\text{kan}}$, podle předpisu výše tedy musíme zkonstruovat

$$\begin{pmatrix} | & | \\ [f(e_1)]_{B_2} & [f(e_2)]_{B_2} \\ | & | \end{pmatrix}.$$

Souřadnice $[(1,-1,1)^T]_{B_2}$, $[(0,1,1)^T]_{B_2}$ můžeme získat jako řešení soustavy

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

V tomto případě si také stačí uvědomit, že $f(e_1)$ odpovídá prvnímu bázickému vektoru B_2 a $f(e_2)$ odpovídá třetímu bázickému vektoru B_2, jejich souřadnice budou proto $(1,0,0)^T$, resp. $(0,0,1)^T$. Výsledná matice má proto tvar

$$_{B_2}[f]_{\text{kan}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Opět je užitečné ukázat i alternativní způsob pomocí skládání jednodušších zobrazení:

$$_{B_2}[f]_{\text{kan}} = {}_{B_2}[id]_{\text{kan}} \cdot {}_{\text{kan}}[f]_{\text{kan}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zde ale musíme invertovat matici $_{B_2}[id]_{\text{kan}} = ({}_{\text{kan}}[id]_{B_2})^{-1}$, takže pokud inverzi nemáme předem spočítanou, tak tento postup efektivnější nebude.

(d) Chceme matici $_{B_2}[f]_{B_1}$, podle předpisu výše tedy musíme zkonstruovat

$$\left(\left[f\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right]_{B_2} \quad \left[f\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right]_{B_2} \right).$$

Z podúlohy (b) již známe obrazy $f(1,-1)^T = (1,-2,0)^T$, $f(1,1)^T = (1,0,2)^T$. Ty tedy stačí vyjádřit v souřadnicích báze B_2. Souřadnice nalezeneme jako řešení soustavy

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right).$$

Jednotlivá řešení jsou vektory $(1,0,-1)^T$, $(1,0,1)^T$, výsledná matice má proto tvar

$$_{B_2}[f]_{B_1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

S využitím předchozích bodů hledanou matici můžeme také spočítat takto:

$$_{B_2}[f]_{B_1} = {}_{B_2}[f]_{\text{kan}} \cdot {}_{\text{kan}}[id]_{B_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cv. 12.5 Uvažujme dvě lineární zobrazení $f, g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ zadaná maticemi

$$_{B}[f]_{\text{kan}} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad {}_{B}[g]_{\text{kan}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

kde $B = \{(1,0,-1)^T, (1,1,0)^T, (1,-2,1)^T\}$. Určete $_{\text{kan}}[g \circ f]_{\text{kan}}$.

Řešení:

K řešení můžeme využít vztahu $_{B_3}[g \circ f]_{B_1} = {}_{B_3}[g]_{B_2} \cdot {}_{B_2}[f]_{B_1}$, v našem případě ve tvaru

$$_{\text{kan}}[g \circ f]_{\text{kan}} = {}_{\text{kan}}[g]_{B} \cdot {}_{B}[f]_{\text{kan}}.$$

Matici $_{\text{kan}}[g]_{B}$ můžeme nejsnadněji zkonstruovat pomocí matic přechodu jako

$$_{\text{kan}}[g]_{B} = {}_{\text{kan}}[id]_{B} \cdot {}_{B}[g]_{\text{kan}} \cdot {}_{\text{kan}}[id]_{B}.$$

Dostáváme tedy

$$_{\text{kan}}[g]_{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 7 & 0 \\ 4 & -1 & -6 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Výsledná matice proto je

$$_{\text{kan}}[g \circ f]_{\text{kan}} = \begin{pmatrix} -2 & 7 & 0 \\ 4 & -1 & -7 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Cv. 12.6 Mějme lineární zobrazení $f\colon U \to V$ dané maticovým předpisem $A = {}_{B_V}[f]_{B_U}$. Ukažte, že matice $\mathrm{RREF}(A)$ reprezentuje stejné zobrazení, ale vzhledem k jiným bázím.

Řešení:

Vztah mezi A a $\mathrm{RREF}(A)$ lze vyjádřit jako

$$\mathrm{RREF}(A) = E \cdot A = E_k \dots E_1 \cdot A,$$

kde matice E_i reprezentují jednotlivé elementární řádkové úpravy. Pro nás je klíčové, že tyto matice jsou regulární a každou regulární matici můžeme chápat jako matici přechodu

$$E_i = {}_{B_i'}[id]_{B_i}$$

mezi určitými bázemi. Podobně můžeme vyjádřit souhrnně matici E

$$E = {}_{B_V'}[id]_{B_V}$$

pro vhodnou bázi B_V' prostoru V. Proč? Protože

$${}_{B_V'}[id]_{B_V} = {}_{B_V'}[id]_{\mathrm{kan}} \cdot {}_{\mathrm{kan}}[id]_{B_V} = ({}_{\mathrm{kan}}[id]_{B_V'})^{-1} \cdot {}_{\mathrm{kan}}[id]_{B_V},$$

dostáváme

$${}_{\mathrm{kan}}[id]_{B_V'} = {}_{\mathrm{kan}}[id]_{B_V} \cdot E^{-1},$$

a tudíž bázi B_V' (přesně řečeno její souřadnice vzhledem ke kanonické bázi) vyčteme ze sloupců matice ${}_{\mathrm{kan}}[id]_{B_V} \cdot E^{-1}$.

Odstupňovaný tvar matice A tedy můžeme chápat jako

$$\mathrm{RREF}(A) = E \cdot A = {}_{B_V'}[id]_{B_V} \cdot {}_{B_V}[f]_{B_U} = {}_{B_V'}[f]_{B_U},$$

tedy maticovou reprezentaci stejného zobrazení, která se liší pouze ve výstupní bázi.

Cv. 12.7 Známe matici ${}_B[f]_B$ lineárního zobrazení $f\colon U \to U$. Jak můžeme určit matici ${}_{B'}[f]_{B'}$ vůči bázi B'?

Řešení:

Máme dvě možnosti, jak dojít k řešení:

(a) Matici můžeme sestavit přímo z definice analogicky postupu sestavení matice ${}_B[f]_B$.

(b) Můžeme využít již spočítaných výsledků a skládání lineárních zobrazení: ${}_{B'}[f]_{B'} = {}_{B'}[id]_B \cdot {}_B[f]_B \cdot {}_B[id]_{B'}$.
Intuitivně: zobrazovaný vektor vůči bázi B' se zobrazí maticí přechodu ${}_B[id]_{B'}$ vůči bázi B, následně se transformuje maticí ${}_B[f]_B$ a vyjádří se zpět maticí přechodu ${}_{B'}[id]_B$ vůči bázi B'.

Cv. 12.8 Mějme matici M lineárního zobrazení. Diskutujte, kolik lineárních zobrazení popisuje matice M?

Řešení:

Jedná se o lehce zavádějící otázku. Odpověď záleží na podmínce, jestli máme definované báze vůči nimž zobrazení definujeme. V případě, že ano, pak matice M reprezentuje jen jedno lineární zobrazení a toto lineární zobrazení je reprezentováno právě jednou maticí, jedná se o důsledek věty o jednoznačnosti matice lineárního zobrazení. Pokud však není uvedeno, vůči jaké bázi se zobrazení vyjadřuje pak ke každé bázi existuje jedno lineární zobrazení a je jich tedy nekonečně mnoho.