

12. Matice přechodu a matice lineárního zobrazení

Matice přechodu

Cv. 12.1 V prostoru \mathbb{R}^3 uvažujme dvě báze

$$B_1 = \{(1, 1, 1)^T, (0, 1, -1)^T, (2, 0, 1)^T\}, \quad B_2 = \{(3, 2, 2)^T, (1, 0, 1)^T, (1, 2, 2)^T\}.$$

- Sestrojte matici přechodu od báze B_1 do kanonické.
- Sestrojte matici přechodu od kanonické báze do báze B_1 .
- Určete souřadnice vektoru $(1, 2, 0)^T$ vzhledem k bázi B_1 .
- Sestrojte matici přechodu od báze B_2 do báze B_1 .

Cv. 12.2 Najděte matici přechodu od báze b_1, b_2, b_3, b_4 k bázi b_2, b_4, b_1, b_3 .

Cv. 12.3 Určete matici přechodu od báze B_1 do báze B_2 prostoru \mathcal{P}^2 , je-li

$$B_1 = \{x^2 + 1, x^2 - 3x + 1, x^2 + x + 3\}, \quad B_2 = \{x^2 + 2x + 1, 2x^2 + 1, x^2 - x\}.$$

Matice obecného lineárního zobrazení

Cv. 12.4 Uvažujme lineární zobrazení $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ zadané obrazy kanonické báze:

$$f(e_1) = (1, -1, 1)^T, \quad f(e_2) = (0, 1, 1)^T.$$

Uvažujme dvě báze

$$B_1 = \{(1, -1)^T, (1, 1)^T\}, \quad B_2 = \{(1, -1, 1)^T, (1, 0, 1)^T, (0, 1, 1)^T\}.$$

Spočítejte:

- matici zobrazení vzhledem ke kanonickým bázím, tj. ${}_{\text{kan}}[f]_{\text{kan}}$.
- matici zobrazení od B_1 ke kanonické bázi, tj. ${}_{\text{kan}}[f]_{B_1}$.
- matici zobrazení od kanonické báze k B_2 , tj. ${}_{B_2}[f]_{\text{kan}}$.
- matici zobrazení od B_1 k B_2 , tj. ${}_{B_2}[f]_{B_1}$.

Cv. 12.5 Uvažujme dvě lineární zobrazení $f, g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ zadaná maticemi

$${}_B[f]_{\text{kan}} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad {}_B[g]_{\text{kan}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

kde $B = \{(1, 0, -1)^T, (1, 1, 0)^T, (1, -2, 1)^T\}$. Určete ${}_{\text{kan}}[g \circ f]_{\text{kan}}$.

Cv. 12.6 Mějme lineární zobrazení $f: U \rightarrow V$ dané maticovým předpisem $A = {}_{B_V}[f]_{B_U}$. Ukažte, že matice $\text{RREF}(A)$ reprezentuje stejné zobrazení, ale vzhledem k jiným bázím.

Cv. 12.7 Známe matici ${}_B[f]_B$ lineárního zobrazení $f: U \rightarrow U$. Jak můžeme určit matici ${}_{B'}[f]_{B'}$ vůči bázi B' ?

Cv. 12.8 Mějme matici M lineárního zobrazení. Diskutujte, kolik lineárních zobrazení popisuje matice M ?