13. Vlastnosti a druhy lineárních zobrazení

Obraz a jádro

Cv. 13.1 Pro lineární zobrazení $f\colon \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ dané předpisem $A \mapsto (A - A^T)$ rozhodněte, které vektory patří do jádra a které do obrazu:

(a) I_2,

(b) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$,

(d) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Cv. 13.2 Uvažujme lineární zobrazení $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Označme lineární zobrazení $f^1 = f$, $f^2 = f \circ f$, $f^n = f \circ f^{n-1}$. Ukažte, že $\mathrm{Ker}(f^{(n-1)}) \subseteq \mathrm{Ker}(f^n)$.

Cv. 13.3 Buď $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ lineární zobrazení zadané

$$f(1,0,1) = (0,1)^T, \quad f(0,1,1) = (-1,0)^T, \quad f(1,1,0) = (1,0)^T.$$

(a) Určete $\dim f(\mathbb{R}^3)$ a $\dim \mathrm{Ker}(f)$.

(b) Najděte bázi $f(\mathbb{R}^3)$ a $\mathrm{Ker}(f)$.

Cv. 13.4 Co je obrazem prostoru $\mathrm{span}\{\sin x, \cos x\}$ při zobrazení s maticí $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ vzhledem k bázím $\{\cos x - \sin x,\ \sin x\}$ a $\{\cos x + \sin x,\ \cos x\}$?

Cv. 13.5 Buď $f\colon U \to V$ lineární zobrazení a W podprostor $f(U)$. Dokažte, že tzv. úplný vzor

$$f^{-1}(W) = \{x \in U;\ f(x) \in W\}$$

je podprostor prostoru U.

Zobrazení prosté a „na“

Cv. 13.6 Najděte příklady lineárních zobrazení (vyjádřených například maticově $f(x) = Ax$) takových, aby zobrazení

(a) bylo prosté a „na“,

(b) bylo prosté, ale nebylo „na“,

(c) nebylo prosté, ale bylo „na“,

(d) nebylo ani prosté, ani „na“.

Cv. 13.7 Mějme lineární zobrazení $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadané obrazem báze B:

$$f(2,1,1) = (1,2,3)^T,$$
$$f(1,3,5) = (3,2,1)^T,$$
$$f(7,1,4) = (1,1,1)^T.$$

Zjistěte, jestli je zobrazení prosté (pokud není, najděte vektory $u, v \in \mathbb{R}^3$ takové, že $u \neq v \wedge f(u) = f(v)$) a jestli je „na“ (pokud ne, najděte vektor, který nemá předobraz, tedy $u \in \mathbb{R}^3$ takové že $\forall v \in \mathbb{R}^3\colon f(v) \neq u$). Určete dimenzi a bázi obrazu a jádra tohoto lineárního zobrazení.

Cv. 13.8 Jak poznáme ze zadané matice $A \in \mathbb{T}^{m\times n}$ lineárního zobrazení $f\colon U \to V$, že zobrazení f je prosté, resp. „na“?

Cv. 13.9 Rozhodněte, zda je dané lineární zobrazení prosté a zda je „na“:

(a) $f\colon \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^3$ dané předpisem $f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a+b+c,\, a+b,\, a)^T$,

(b) $f\colon \mathcal{P}^2 \to \mathbb{R}^4$ dané předpisem $f(ax^2+bx+c) = (a+b,\, 2b-c,\, a-b+c,\, a+b)^T$,

(c) $f\colon \mathcal{P}^2 \to \mathbb{R}^3$ dané předpisem $f(ax^2+bx+c) = (a+b,\, c,\, a+b)^T$,

(d) $f\colon \mathcal{P}^2 \to \mathbb{R}^3$ dané předpisem $f(ax^2+bx+c) = (a+b,\, 2b-c,\, a-b)^T$.

Isomorfismus

Cv. 13.10 Rozhodněte, zda zobrazení $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dané předpisem

$$f(x,y,z) = (x+y-2z,\, y-z,\, x-y)^T$$

je isomorfismem $\mathbb{R}^3$ na sebe sama (takzvaným automorfismem).

Cv. 13.11 Rozhodněte, jestli jsou následující dvojice vektorových prostorů isomorfní. Pokud ano, najděte vhodný isomorfismus.

(a) $\mathbb{R}^{2\times 2}$ a $\mathbb{R}^4$,

(b) $\mathbb{R}^4$ a $\mathcal{P}^3$ (prostor reálných polynomů stupně nejvýš tři),

(c) $\mathbb{R}^{m\times n}$ a $\mathbb{R}^{n\times m}$,

(d) $\mathbb{R}^n$ nad $\mathbb{R}$ a $\mathbb{C}^n$ nad $\mathbb{C}$,

(e) $\mathbb{R}^2$ a $\{x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 = x_3 + x_4 = 0\}$,

(f) $\mathbb{R}^4$ a prostor lineárních zobrazení $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$.

Cv. 13.12 Buď $f\colon U \to V$ isomorfismus a $x_1, \ldots, x_n \in U$. Dokažte, že jsou-li $x_1, \ldots, x_n$ lineárně nezávislé, pak i $f(x_1), \ldots, f(x_n)$ jsou lineárně nezávislé.