

## 14. Afinní podprostory

### Afinní podprostory, afinní nezávislost

**Cv. 14.1** Ukažte, že množina řešení (řešitelné) soustavy  $Ax = b$  je afinní množina, a to tak, že je uzavřená na afinní kombinace.

**Cv. 14.2** Rozhodněte, zda vektory

$$x_0 = (1, 2, 3)^T, x_1 = (2, 3, 1)^T, x_2 = (1, 3, 2)^T, x_3 = (2, 1, 3)^T$$

jsou afinně nezávislé.

**Cv. 14.3** Rozhodněte, zda vektory

$$x_0 = (1, 0, 2)^T, x_1 = (2, 2, 1)^T, x_2 = (2, 1, 3)^T \text{ a } x_3 = (3, 3, 2)^T$$

leží v jedné rovině.

**Cv. 14.4** Dokažte, že vektory  $x_0, x_1, \dots, x_n$  jsou afinně nezávislé právě tehdy, když vektory  $y_0 = (x_0^T, 1)^T, y_1 = (x_1^T, 1)^T, \dots, y_n = (x_n^T, 1)^T$  jsou lineárně nezávislé.

**Cv. 14.5** Rozhodněte, zda  $M = N$  pro

- (a)  $M = \text{span}\{(1, 2)^T\} + (1, -1)^T,$   
 $N = \text{span}\{(2, 4)^T\} + (2, 3)^T,$   
 (b)  $M = \text{span}\{(1, 2, 1)^T, (2, 1, 0)^T\} + (1, 0, 0)^T,$   
 $N = \text{span}\{(0, 3, 2)^T, (3, 0, -1)^T\} + (2, -1, -1)^T.$

### Afinní zobrazení

**Cv. 14.6** Uvažujme dvě afinní zobrazení  $f, g$  v rovině, přičemž  $f$  představuje překlopení podle přímky  $p = \{(x, 10); x \in \mathbb{R}\}$  a  $g$  představuje překlopení podle přímky  $q = \{(2, y); y \in \mathbb{R}\}$ .

- (a) Najděte maticový předpis zobrazení  $f$ ,  
 (b) najděte maticový předpis zobrazení  $g$ ,  
 (c) z předchozích předpisů odvoďte maticový předpis zobrazení  $f \circ g$ .

**Cv. 14.7** Dokažte:

- (a) Obraz afinního podprostoru při afinním zobrazení je afinní podprostor.  
 (b) Složením dvou afinních zobrazení dostaneme opět afinní zobrazení.  
 (c) Buď  $f: U \rightarrow V$  lineární zobrazení a  $v \in V$ . Pak vzor vektoru  $v$

$$f^{-1}(v) := \{u \in U ; f(u) = v\}$$

je afinní podprostor v  $U$ .

**Cv. 14.8** Najděte úplný vzor  $f^{-1}(I_2)$  pro lineární zobrazení  $f: \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}$  zadané  $f(A) = \frac{1}{2}(A + A^T)$ .