10. Maticové prostory

Cv. 10.1 Buď
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$
Postupně nad tělesy $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}_5$ a $\mathbb{Z}_7$ rozhodněte, zda platí:

(a) $v \in \mathrm{Ker}(A)$,

(b) $v \in \mathcal{S}(A)$.

Řešení:
Z definice jádra a sloupcového prostoru matice platí
$$\begin{aligned} \mathrm{Ker}(A) &= \{x \in \mathbb{T}^n;\ Ax = 0\}, \\ \mathcal{S}(A) &= \mathrm{span}\{A_{*1}, \dots, A_{*n}\} = \{Ax;\ x \in \mathbb{T}^n\}, \end{aligned}$$
stačí tedy ověřit, zda vektor $v = (1,2)^T$ řeší soustavu $Ax = 0$ nad daným tělesem a zda platí $Ax = v$ pro nějaké $x \in \mathbb{T}^2$.

Nad tělesem $\mathbb{R}$*:*

(a) vektor v nepatří do jádra matice A, protože
$$Av = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

(b) vektor v patří do sloupcového prostoru matice A, protože soustava
$$(A \mid v) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{3}{5} \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} \end{array}\right)$$
má řešení, konkrétně platí $(1,2)^T = \frac{3}{5}(1,3)^T + \frac{1}{5}(2,1)^T$.

Nad tělesem $\mathbb{Z}_5$*:*

(a) vektor v patří do $\mathrm{Ker}(A)$, protože
$$Av = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

(b) vektor v nepatří do $\mathcal{S}(A)$, protože soustava
$$(A \mid v) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{array}\right)$$
nemá nad tělesem $\mathbb{Z}_5$ řešení.

Nad tělesem $\mathbb{Z}_7$*:*

(a) vektor v nepatří $\mathrm{Ker}(A)$, protože
$$Av = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

(b) vektor v patří do $\mathcal{S}(A)$, protože soustava

$$(A \mid v) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

má nad tělesem $\mathbb{Z}_7$ řešení a platí $(1,2)^T = 2(1,3)^T + 3(2,1)^T$.

Cv. 10.2 Najděte báze prostorů $\mathcal{R}(A)$, $\mathcal{S}(A)$ a $\mathrm{Ker}(A)$ pro matici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 6 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Řešení:

Převedeme matici A do redukovaného odstupňovaného tvaru $\mathrm{RREF}(A)$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 6 & 1 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{RREF}(A).$$

Bázi řádkového prostoru $\mathcal{R}(A)$ tvoří (například) nenulové vektory v řádcích výsledné matice, tedy vektory $(1,2,0,1)^T$, $(0,0,1,1)^T$. Důvodem je, že elementární řádkové úpravy nemění řádkový prostor matice, a tedy $\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(\mathrm{RREF}(A))$. Najít bázi řádkového prostoru matice $\mathrm{RREF}(A)$ je pak jednoduché – jsou to všechny nenulové řádky.

Bázi sloupcového prostoru můžeme vybrat z původních sloupců matice A, které odpovídají bázickým sloupcům odstupňovaného tvaru. Bázické sloupce jsou první a třetí, tedy vektory $(1,2,3)^T$ a $(2,1,1)^T$ tvoří bázi $\mathcal{S}(A)$. Zdůvodnění je teď jiné, než v případě řádkového prostoru, protože elementární řádkové úpravy obecně mohou změnit sloupový prostor matice. Co ale elementární řádkové úpravy nemění, je lineární závislost a nezávislost mezi sloupci. Tudíž můžeme tvrdit: bázi $\mathcal{S}(\mathrm{RREF}(A)$ tvoří první a třetí sloupec matice $\mathrm{RREF}(A)$, proto bázi $\mathcal{S}(A)$ tvoří první a třetí sloupec matice A.

Bázi jádra matice A získáme z řešení soustavy $Ax = 0$. Množinu všech řešení této soustavy můžeme vyjádřit pomocí nebázických proměnných x_2, x_4 ve tvaru

$$(-2x_2 - x_4, x_2, -x_4, x_4)^T = (-2,1,0,0)^T x_2 + (-1,0,-1,1)^T x_4.$$

Bázi $\mathrm{Ker}(A)$ tedy tvoří např. vektory $(-2,1,0,0)^T$, $(-1,0,-1,1)^T$.

Cv. 10.3 Najděte matici A takovou, že

(a) $\mathcal{R}(A)$ obsahuje vektory $(1,1)^T, (1,2)^T$ a $\mathcal{S}(A)$ obsahuje $(1,0,0)^T$, $(0,0,1)^T$,

(b) bázi $\mathcal{R}(A)$ i $\mathcal{S}(A)$ tvoří vektor $(1,1,1)^T$ a báze $\mathrm{Ker}(A)$ je $(1,-2,1)^T$.

Řešení:

(a) Tento příklad je zaměřený na kreativitu a ne na postup podle šablony. Proto popíšeme jen základní myšlenky, které pomohou hledanou matice najít. Ze zadaných vektorů v řádkovém a sloupcovém prostoru vidíme, že hledáme matici 3×2. Dále, z podmínek na řádkový prostor dostáváme $\mathcal{R}(A) = \mathbb{R}^2$, neboli stačí, aby matice A měla lineárně nezávislé sloupce. Pokud dáme vektory z podmínky na $\mathcal{S}(A)$ přímo do sloupců matice A, získáme požadovanou matici

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Hledaná matice ale není zdaleka jednoznačná. Požadovanou vlastnost splňují další matice, jako například

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) V tomto případě hledáme matici 3×3, pro kterou platí

$$\dim \mathcal{R}(A) = \dim \mathcal{S}(A) = \operatorname{rank}(A) = 1, \quad \dim \operatorname{Ker}(A) = 1.$$

Z věty o dimenzi jádra a hodnosti matice ale víme, že pro každou matici $A \in \mathbb{T}^{m \times n}$ musí platit vztah

$$\dim \operatorname{Ker}(A) + \operatorname{rank}(A) = n.$$

V našem případě dostáváme $1 + 1 = \dim \operatorname{Ker}(A) + \operatorname{rank}(A) = 3$. Matice splňující požadované vlastnosti tedy neexistuje.

Cv. 10.4 Rozhodněte, zda pro matice $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ platí

(a) $\mathcal{S}(A) = \mathcal{S}(B)$ implikuje $\operatorname{RREF}(A) = \operatorname{RREF}(B)$,

(b) $\operatorname{RREF}(A) = \operatorname{RREF}(B)$ implikuje $\mathcal{S}(A) = \mathcal{S}(B)$.

Řešení:

(a) Tvrzení neplatí. Například matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

mají stejný sloupcový prostor

$$\operatorname{span}\{(1,0)^T, (0,0)^T\} = \mathcal{S}(A) = \mathcal{S}(B) = \operatorname{span}\{(0,0)^T, (1,0)^T\},$$

ale jejich redukované odstupňované tvary jsou různé (obě matice jsou v RREF).

(b) Neplatí ani tato opačná implikace. Například pro matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

máme $\operatorname{RREF}(A) = \operatorname{RREF}(B) = A$, ale přitom

$$\operatorname{span}\left\{(1,0)^T, (0,0)^T\right\} = \mathcal{S}(A) \neq \mathcal{S}(B) = \operatorname{span}\left\{(0,1)^T, (0,0)^T\right\}.$$

Cv. 10.5 S využitím maticových prostorů určete dimenzi prostoru

$$V = \{x \in \mathbb{R}^n;\, x_1 + \ldots + x_n = 0\}.$$

Řešení:

Prostor V odpovídá množině řešení soustavy

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{array}\right),$$

to znamená jádru matice $A = \begin{pmatrix} 1 \; 1 \; \cdots \; 1 \end{pmatrix}$ Tato matice má rozměr $1 \times n$ a má hodnost 1. Pro dimenzi jádra použijeme vzoreček (věta o dimenzi jádra a hodnosti matice):

$$\dim V = \dim \operatorname{Ker}(A) = n - \operatorname{rank}(A) = n - 1.$$

Závěr: Hledaná dimenze je tedy $n + 1$.

Kdybychom chtěli najít i bázi, tak jednoduše vyřešíme soustavu $Ax = 0$ pomocí Gaussovy eliminace. Bázi tak tvoří například vektory $(1, -1, 0 \ldots, 0)^T$, $(0, 1, -1, 0 \ldots, 0)^T$, …, $(0 \ldots, 0, 1, -1)^T$.

Cv. 10.6 Z vektorů vyberte bázi prostoru $V = \operatorname{span}\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ a pro ostatní vektory najděte souřadnice vůči této bázi:

$$v_1 = (3, 1, 5, 4)^T,\; v_2 = (2, 2, 3, 3)^T,\; v_3 = (1, -1, 2, 1)^T,\; v_4 = (1, 3, 1, 1)^T.$$

Řešení:

Zapíšeme jednotlivé vektory do sloupců matice A, kterou převedeme do redukovaného odstupňovaného tvaru

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{RREF}(A).$$

Připomeňme, že elementární řádkové úpravy zachovávají lineární závislost a nezávislost mezi sloupci, a to dokonce i konkrétní lineární kombinace. Tudíž z matice $\operatorname{RREF}(A)$ snadno vyčteme nejen bázi prostoru $\mathcal{S}(A) = V$, ale i hledané souřadnice.

Vidíme, že bázické sloupce jsou první, druhý a čtvrtý. Bázi prostoru $\mathcal{S}(A) = V$ tedy tvoří původní vektory $v_1 = (3, 1, 5, 4)^T$, $v_2 = (2, 2, 3, 3)^T$ a $v_4 = (1, 3, 1, 1)^T$.

Ze třetího sloupce upravené matice $\operatorname{RREF}(A)$ dostaneme souřadnice vektoru v_3 vzhledem k bázi $B = \{v_1, v_2, v_4\}$, neboť platí

$$v_3 = (1, -1, 2, 1)^T = 1 \cdot (3, 1, 5, 4)^T + (-1) \cdot (2, 2, 3, 3)^T,$$

a tedy $[v_3]_B = (1, -1, 0)^T$.

Cv. 10.7 Určete, jaký je vztah mezi prostory $\operatorname{Ker}(AB)$ a $\operatorname{Ker}(B)$ pro matice

(a) $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$,

(b) $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ regulární, $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$.

Řešení:

(a) Nechť $x \in \mathrm{Ker}(B)$, pak z definice jádra platí $Bx = o$. Vektor x patří také do jádra matice AB, protože

$$(AB)x = A(Bx) = Ao = o,$$

dostaneme tedy inkluzi $\mathrm{Ker}(B) \subseteq \mathrm{Ker}(AB)$. Obrácená inkluze obecně neplatí, např. pro $A = 0_n$ a $B = I_n$ je vektor $y = (1, 0, \dots, 0)^T$ v jádru matice AB, ale nikoliv v jádru matice B.

(b) Nahlédneme, že pro regulární matici A platí také inkluze $\mathrm{Ker}(AB) \subseteq \mathrm{Ker}(B)$, a tedy můžeme psát $\mathrm{Ker}(AB) = \mathrm{Ker}(B)$.

Důkaz. Nechť $x \in \mathrm{Ker}(AB)$, potom $(AB)x = o$. Z regularity matice A existuje inverzní matice A^{-1}, pro kterou platí

$$Bx = (A^{-1}A)Bx = A^{-1}((A\ B)x) = A^{-1}o\ = o,$$

z čehož plyne $x \in \mathrm{Ker}(B)$.

Cv. 10.8 Rozhodněte, zda platí $\mathrm{rank}(A + B) \le \mathrm{rank}(A) + \mathrm{rank}(B)$ pro $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$. (*Hint:* Jaký je vztah mezi prostory $\mathcal{S}(A + B)$ a $\mathcal{S}(A) + \mathcal{S}(B)$?)

Řešení:

Uvažujme prostor generovaný sjednocením sloupců matice A a sloupců matice B, tedy spojení $\mathcal{S}(A) + \mathcal{S}(B)$. Dimenze tohoto prostoru je

$$\dim(\mathcal{S}(A) + \mathcal{S}(B)) \le \dim \mathcal{S}(A) + \dim \mathcal{S}(B) = \mathrm{rank}(A) + \mathrm{rank}(B).$$

Dále, prostor $\mathcal{S}(A) + \mathcal{S}(B)$ obsahuje všechny vektory generované sloupci matice $A + B$, tedy $\mathcal{S}(A + B)$ je podprostorem $\mathcal{S}(A) + \mathcal{S}(B)$. Platí proto

$$\mathrm{rank}(A + B) = \dim \mathcal{S}(A + B) \le \dim(\mathcal{S}(A) + \mathcal{S}(B)) \le \mathrm{rank}(A) + \mathrm{rank}(B).$$