11. Lineární zobrazení, matice vzhledem ke kanonické bázi

Definice lineárního zobrazení

Cv. 11.1 Rozhodněte, zda následující zobrazení $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ jsou lineární:

(a) $f(x,y) = (x, y+3)^T$,
(b) $f(x,y) = (x+2y, y)^T$,
(c) $f(x,y) = (0,0)^T$,
(d) $f(x,y) = (x^2, y)^T$.

Řešení:

(a) Zobrazení $f(x,y) = (x, y+3)^T$ není lineární, protože nulový vektor nezobrazuje na nulový vektor.

(b) Zobrazení $f(x,y) = (x+2y, y)^T$ je lineární. Ověříme obě podmínky z definice.

Součet. Uvažujme dva vektory (x,y) a (x',y'). Jejich součet se zobrazí na vektor

$$f((x,y)+(x',y')) = f(x+x', y+y') = ((x+x')+2(y+y'), (y+y'))^T = \\ = (x+2y, y)^T + (x'+2y', y')^T = f(x,y) + f(x',y').$$

Násobek. Uvažujme vektor (x,y) a skalár α. Pak vektor $\alpha(x,y) = (\alpha x, \alpha y)$ se zobrazí na vektor

$$f(\alpha x, \alpha y) = (\alpha x + 2(\alpha y), \alpha y)^T = \alpha(x+2y, y)^T = \alpha f(x,y).$$

(c) Zobrazení $f(x,y) = (0,0)^T$ je lineární. Vlastnosti z definice lineárního zobrazení se snadno ověří.

(d) Zobrazení $f(x,y) = (x^2, y)^T$ není lineární. Například pro vektor $(x,y) = (1,0)$ a skalár $\alpha = 2$ dostáváme

$$f(\alpha(x,y)) = f(\alpha x, \alpha y) = f(2,0) = (4,0)^T,$$

ale

$$\alpha f(x,y) = 2f(1,0) = 2(1,0)^T = (2,0)^T.$$

Čili obecně $f(\alpha(x,y)) \neq \alpha f(x,y)$.

Cv. 11.2 Rozhodněte, zda následující zobrazení z prostoru $\mathbb{R}^{n\times n}$ jsou lineární:

(a) $f(A) = A^T$,
(b) $f(A) = I_n$,
(c) $f(A) = A^2$,
(d) $f(A) = a_{11}$,

(e) $f(A) = \mathrm{RREF}(A)$,

Řešení:

(a) Zobrazení $f(A) = A^T$ je lineární, což plyne z vlastností maticové transpozice:

$$(A+B)^T = A^T + B^T, \quad (\alpha A)^T = \alpha A^T.$$

(b) Zobrazení $f(A) = I_n$ není lineární, protože nezobrazuje nulovou matici na nulovou.

(c) Zobrazení $f(A) = A^2$ není lineární. Například pro $A = I_n$ a $\alpha = 3$ máme

$$f(\alpha A) = 9I_n \neq 3I_n = \alpha f(A).$$

(d) Zobrazení $f(A) = a_{11}$ je lineární. Podmínky z definice se snadno ověří.

(e) Zobrazení $f(A) = \mathrm{RREF}(A)$ není lineární. Například pro $A = B = I_n$ máme

$$f(A+B) = I_n \neq I_n + I_n = f(A) + f(B).$$

Matice lineárního zobrazení vzhledem ke kanonické bázi

Cv. 11.3 Pro lineární zobrazení $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dané přepisem $f(x,y) = (x+y,\, x-y)^T$ vypočtěte matici lineárního zobrazení vůči kanonické bázi.

Řešení:
Navrhneme dva způsoby výpočtu matice zobrazení:

(a) Vyjdeme z definice, že lineární zobrazení je popsáno obrazem báze. V našem případě potřebujeme vypočítat obraz kanonické báze, čili

$$\begin{aligned} f(e_1) &= f(1,0) = (1,1)^T, \\ f(e_2) &= f(0,1) = (1,-1)^T. \end{aligned}$$

Tyto vektory tvoří sloupce hledané matice

$${}_{\mathrm{kan}}[f]_{\mathrm{kan}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(b) Vyjdeme z předpisu $f(x,y) = (x+y,\, x-y)^T$, který chceme vyjádřit jako $f(x,y) = A(x,y)^T$ pro určitou matici $A = \left(\begin{smallmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{smallmatrix}\right)$. Tedy

$$\begin{pmatrix} x+y \\ x-y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x + a_{12}y \\ a_{21}x + a_{22}y \end{pmatrix}.$$

Není těžké nahlédnout porovnáním koeficientů u x, y, že rovnost splňuje matice

$${}_{\mathrm{kan}}[f]_{\mathrm{kan}} = A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Cv. 11.4 Najděte obraz vektoru $v = (-1,1,2)^T$ při lineárním zobrazení $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definovaném:

$$f(1,0,0) = (1,1)^T,\ f(0,1,0) = (-1,2)^T,\ f(0,0,1) = (0,0)^T.$$

Řešení:

Předvedeme dva možné způsoby, jak postupovat.

(a) První způsob využívá matici zobrazení. Sestavíme proto nejprve matici zobrazení vzhledem ke kanonické bázi. Protože máme zadány obrazy kanonické bázi, stačí tyto obrazy poskládat do sloupců matice. Tedy

$$_{\text{kan}}[f]_{\text{kan}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Hledaný obraz pak dostaneme vynásobením s maticí zobrazení:

$$f(v) = {}_{\text{kan}}[f]_{\text{kan}} \cdot [v]_{\text{kan}} = {}_{\text{kan}}[f]_{\text{kan}} \cdot v = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Druhý způsob vychází přímo z definice lineárního zobrazení. Protože

$$v = (-1,1,2)^T = -1 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2 + 2 \cdot e_3,$$

platí

$$\begin{aligned} f(v) &= f(-1 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2 + 2 \cdot e_3) = -1 \cdot f(e_1) + 1 \cdot f(e_2) + 2 \cdot f(e_3) = \\ &= -1(1,1)^T + 1(-1,2)^T + 2(0,0)^T = (-2,1)^T. \end{aligned}$$

Cv. 11.5 Najděte matici následujících lineárních zobrazení v rovině $\mathbb{R}^2$ vzhledem ke kanonické bázi:

(a) Otočení o 90° proti směru hodinových ručiček.

(b) Projekce na osu x.

(c) Otočení o 90° proti směru hodinových ručiček a pak projekce na osu x.

(d) Projekce na osu x a pak otočení o 90° proti směru hodinových ručiček.

Řešení:

Stačí zobrazit jednotkové vektory $e_1 = (1,0)^T$, $e_2 = (0,1)^T$ a jejich obrazy tvoří sloupce hledané matice.

(a) Vektor $(1,0)^T$ se otočí na $(0,1)^T$ a vektor $(0,1)^T$ se otočí na $(-1,0)^T$. Matice zobrazení tedy je

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Vektor $(1,0)^T$ se projektuje na $(1,0)^T$ a vektor $(0,1)^T$ se projektuje na $(0,0)^T$. Matice zobrazení tedy je

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(c) Vektor $(1,0)^T$ se otočí na $(0,1)^T$, který se pak projektuje na $(0,0)^T$. Vektor $(0,1)^T$ se otočí na $(-1,0)^T$ a následně projektuje na $(-1,0)^T$. Matice zobrazení tedy je
$$C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
Alternativně dostaneme matici zobrazení složením předchozích dvou zobrazení. Matice je pak rovna součinu příslušných dvou matic, tedy
$$C = BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(d) Vektor $(1,0)^T$ se projektuje na $(1,0)^T$, který se pak otočí na $(0,1)^T$. Vektor $(0,1)^T$ se projektuje na $(0,0)^T$ a následně otočí na $(0,0)^T$. Matice zobrazení tedy je
$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
Alternativně dostaneme matici zobrazení složením předchozích dvou zobrazení. Matice je pak rovna součinu příslušných dvou matic, tedy
$$D = AB = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tento příklad opět ilustruje, že skládání zobrazení není komutativní operace, stejně jako a součin matic.