11. Lineární zobrazení, matice vzhledem ke kanonické bázi

Definice lineárního zobrazení

Cv. 11.1 Rozhodněte, zda následující zobrazení $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ jsou lineární:

(a) $f(x,y) = (x, y+3)^T$,
(b) $f(x,y) = (x+2y, y)^T$,
(c) $f(x,y) = (0,0)^T$,
(d) $f(x,y) = (x^2, y)^T$.

Řešení:

(a) Zobrazení $f(x,y) = (x, y+3)^T$ není lineární, protože nulový vektor nezobrazuje na nulový vektor.

(b) Zobrazení $f(x,y) = (x+2y, y)^T$ je lineární. Ověříme obě podmínky z definice.

Součet. Uvažujme dva vektory (x,y) a (x',y'). Jejich součet se zobrazí na vektor

$$f((x,y)+(x',y')) = f(x+x', y+y') = ((x+x')+2(y+y'), (y+y'))^T = \\ = (x+2y, y)^T + (x'+2y', y')^T = f(x,y) + f(x',y').$$

Násobek. Uvažujme vektor (x,y) a skalár α. Pak vektor $\alpha(x,y) = (\alpha x, \alpha y)$ se zobrazí na vektor

$$f(\alpha x, \alpha y) = (\alpha x + 2(\alpha y), \alpha y)^T = \alpha(x+2y, y)^T = \alpha f(x,y).$$

(c) Zobrazení $f(x,y) = (0,0)^T$ je lineární. Vlastnosti z definice lineárního zobrazení se snadno ověří.

(d) Zobrazení $f(x,y) = (x^2, y)^T$ není lineární. Například pro vektor $(x,y) = (1,0)$ a skalár $\alpha = 2$ dostáváme

$$f(\alpha(x,y)) = f(\alpha x, \alpha y) = f(2,0) = (4,0)^T,$$

ale

$$\alpha f(x,y) = 2f(1,0) = 2(1,0)^T = (2,0)^T.$$

Čili obecně $f(\alpha(x,y)) \neq \alpha f(x,y)$.

Cv. 11.2 Rozhodněte, zda následující zobrazení z prostoru $\mathbb{R}^{n\times n}$ jsou lineární:

(a) $f(A) = A^T$,
(b) $f(A) = I_n$,
(c) $f(A) = A^2$,
(d) $f(A) = a_{11}$,

(e) $f(A) = \mathrm{RREF}(A)$,

Řešení:

(a) Zobrazení $f(A) = A^T$ je lineární, což plyne z vlastností maticové transpozice:
$$(A+B)^T = A^T + B^T, \quad (\alpha A)^T = \alpha A^T.$$

(b) Zobrazení $f(A) = I_n$ není lineární, protože nezobrazuje nulovou matici na nulovou.

(c) Zobrazení $f(A) = A^2$ není lineární. Například pro $A = I_n$ a $\alpha = 3$ máme
$$f(\alpha A) = 9I_n \neq 3I_n = \alpha f(A).$$

(d) Zobrazení $f(A) = a_{11}$ je lineární. Podmínky z definice se snadno ověří.

(e) Zobrazení $f(A) = \mathrm{RREF}(A)$ není lineární. Například pro $A = B = I_n$ máme
$$f(A+B) = I_n \neq I_n + I_n = f(A) + f(B).$$

Matice lineárního zobrazení vzhledem ke kanonické bázi

Cv. 11.3 Pro lineární zobrazení $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dané přepisem $f(x,y) = (x+y,\, x-y)^T$ vypočtěte matici lineárního zobrazení vůči kanonické bázi.

Řešení:
Navrhneme dva způsoby výpočtu matice zobrazení:

(a) Vyjdeme z definice, že lineární zobrazení je popsáno obrazem báze. V našem případě potřebujeme vypočítat obraz kanonické báze, čili
$$f(e_1) = f(1,0) = (1,1)^T,$$
$$f(e_2) = f(0,1) = (1,-1)^T.$$

Tyto vektory tvoří sloupce hledané matice
$$_{\mathrm{kan}}[f]_{\mathrm{kan}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(b) Vyjdeme z předpisu $f(x,y) = (x+y,\, x-y)^T$, který chceme vyjádřit jako $f(x,y) = A(x,y)^T$ pro určitou matici $A = \left(\begin{smallmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{smallmatrix}\right)$. Tedy
$$\begin{pmatrix} x+y \\ x-y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x + a_{12}y \\ a_{21}x + a_{22}y \end{pmatrix}.$$

Není těžké nahlédnout porovnáním koeficientů u x, y, že rovnost splňuje matice
$$_{\mathrm{kan}}[f]_{\mathrm{kan}} = A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$