

14. Afinity podprostory

Afinity podprostory, afinity nezávislost

Cv. 14.1 Ukažte, že množina řešení (řešitelné) soustavy $Ax = b$ je afinity množina, a to tak, že je uzavřená na afinity kombinace.

Řešení:

Označme jako $X = \{x \in \mathbb{R}^n; Ax = b\}$ množinu řešení soustavy. Uvažujme n řešení $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$ (tedy $Ax_i = b$ pro $i = 1, \dots, n$). Máme ukázat, že jejich libovolná afinity kombinace opět náleží do X , tedy

$$A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n) = b, \quad \text{kde} \quad \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1.$$

Úpravou, kdy roznásobíme závorku a vytkneme jednotlivá α_i dostáváme z výrazu na levé straně

$$\begin{aligned} A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n) &= \alpha_1 Ax_1 + \alpha_2 Ax_2 + \dots + \alpha_n Ax_n = \\ &= \alpha_1 b + \alpha_2 b + \dots + \alpha_n b = \\ &= (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n) b = \\ &= b. \end{aligned}$$

Proto libovolná afinity kombinace řešení soustavy $Ax = b$ je opět jejím řešením.

Cv. 14.2 Rozhodněte, zda vektory

$$x_0 = (1, 2, 3)^T, \quad x_1 = (2, 3, 1)^T, \quad x_2 = (1, 3, 2)^T, \quad x_3 = (2, 1, 3)^T$$

jsou afinity nezávislé.

Řešení:

Spočítáme vektory

$$x_1 - x_0 = (1, 1, -2)^T, \quad x_2 - x_0 = (0, 1, -1)^T, \quad x_3 - x_0 = (1, -1, 0)^T.$$

Tyto tři vektory jsou lineárně závislé (generují dvou-dimenzionální podprostor), proto jsou původní vektory afinity závislé.

Cv. 14.3 Rozhodněte, zda vektory

$$x_0 = (1, 0, 2)^T, \quad x_1 = (2, 2, 1)^T, \quad x_2 = (2, 1, 3)^T \quad \text{a} \quad x_3 = (3, 3, 2)^T$$

leží v jedné rovině.

Řešení:

Zadané vektory x_0, x_1, x_2, x_3 leží v jedné rovině právě tehdy, když dimenze afinity podprostoru $\text{span}\{x_1 - x_0, x_2 - x_0, x_3 - x_0\}$ je rovna 2. Nejprve spočítáme

$x_1 - x_0 = (1, 2, -1)^T$, $x_2 - x_0 = (1, 1, 1)^T$, $x_3 - x_0 = (2, 3, 0)^T$ a následně dimenzi jejich lineárního obalu pomocí hodnoty následující matice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vidíme, že hodnota matice je 2, tedy vektory $x_1 - x_0$, $x_2 - x_0$, $x_3 - x_0$ leží v rovině procházející počátkem a proto x_0, x_1, x_2, x_3 leží v rovině.

Cv. 14.4 Dokažte, že vektory x_0, x_1, \dots, x_n jsou afinně nezávislé právě tehdy, když vektory $y_0 = (x_0^T, 1)^T$, $y_1 = (x_1^T, 1)^T, \dots, y_n = (x_n^T, 1)^T$ jsou lineárně nezávislé.

Řešení:

Vektory

$$(x_0^T, 1)^T, (x_1^T, 1)^T, \dots, (x_n^T, 1)^T$$

jsou lineárně nezávislé právě tehdy, když vektory

$$(x_0^T, 1)^T, (x_1^T - x_0^T, 0)^T, \dots, (x_n^T - x_0^T, 0)^T$$

jsou lineárně nezávislé (jsou to vlastně elementární úpravy, když vektory dáme do matice). To je ekvivalentní s tím, že vektory

$$(x_1^T - x_0^T, 0)^T, \dots, (x_n^T - x_0^T, 0)^T$$

jsou lineárně nezávislé. A to už je zřejmě ekvivalentní s definicí afinní nezávislosti vektorů x_0, x_1, \dots, x_n .

Cv. 14.5 Rozhodněte, zda $M = N$ pro

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad M &= \text{span}\{(1, 2)^T\} + (1, -1)^T, \\ N &= \text{span}\{(2, 4)^T\} + (2, 3)^T, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(b)} \quad M &= \text{span}\{(1, 2, 1)^T, (2, 1, 0)^T\} + (1, 0, 0)^T, \\ N &= \text{span}\{(0, 3, 2)^T, (3, 0, -1)^T\} + (2, -1, -1)^T. \end{aligned}$$

Řešení:

(a) Vidíme, že jak M , tak N jsou přímky (afinní podprostory dimenze 1). Jejich rovnost nastane právě tehdy, když libovolný bod z M leží v N a naopak. Například $(1, -1)^T \in M$ se musí dát vyjádřit jako afinní kombinace bodů z N , tedy jako $(1, -1)^T = \alpha(2, 4)^T + (2, 3)^T$, kde $\alpha \in \mathbb{R}$. To nám dává soustavu dvou rovnic o 1 neznámé

$$\begin{aligned} 2\alpha + 2 &= 1, \\ 4\alpha + 3 &= -1, \end{aligned}$$

kteřá nemá řešení. Proto $(1, -1)^T \notin N$ a tedy $M \neq N$. Dokonce ani žádný vztah z $M \not\subseteq N$, $N \not\subseteq M$ není možný. Ve skutečnosti přímky M, N jsou rovnoběžné.

- (b) Opět musí platit, že libovolný vektor $a(1, 2, 1)^T + b(2, 1, 0)^T + (1, 0, 0)^T \in M$ pro $a, b \in \mathbb{R}$ náleží do N , tedy se dá vyjádřit jako $c(0, 3, 2)^T + d(3, 0, -1)^T + (2, -1, -1)^T$ (pro $c, d \in \mathbb{R}$) a naopak. Musí proto platit mezi oběma výrazy rovnost

$$a(1, 2, 1)^T + b(2, 1, 0)^T + (1, 0, 0)^T = c(0, 3, 2)^T + d(3, 0, -1)^T + (2, -1, -1)^T,$$

která se dá zapsat jako

$$\begin{aligned} a + 2b + 1 &= 3d + 2, \\ 2a + b &= 3c - 1, \\ a &= 2c - d - 1. \end{aligned}$$

Pozor, nejedná se o klasickou soustavu rovnic, spíš jen o rovnost s parametry, kterým dodáme určitou interpretaci. Pokud budeme schopni c, d vyjádřit v závislosti na a, b , znamená to, že pro libovolný vektor $z M$ daný souřadnicemi a, b jsme schopni nalézt odpovídající souřadnice c, d toho samého vektoru v N . Tedy ukážeme, že $M \subseteq N$. Podobně, pokud vyjádříme a, b v závislosti na c, d , dostaneme $N \subseteq M$ a v důsledku $M = N$.

Pojďme nejprve vyjádřit a, b v závislosti na $c, d \in \mathbb{R}$. Tím soustavu interpretujeme jako parametrickou soustavu, kde $c, d \in \mathbb{R}$ jsou parametry a a, b jsou neznámé. Rovnicově

$$\begin{aligned} a + 2b &= 3d + 1, \\ 2a + b &= 3c - 1, \\ a &= 2c - d - 1, \quad c, d \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

a maticově

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3d + 1 \\ 2 & 1 & 3c - 1 \\ 1 & 0 & 2c - d - 1 \end{array} \right) &\sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2c - d - 1 \\ 2 & 1 & 3c - 1 \\ 1 & 2 & 3d + 1 \end{array} \right) \sim \\ &\sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2c - d - 1 \\ 0 & 1 & -c + 2d + 1 \\ 0 & 2 & -2c + 4d + 2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2c - d - 1 \\ 0 & 1 & -c + 2d + 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Řešení soustavy je $a = 2c - d - 1$ a $b = -c + 2d + 1$.

Podobně pro $a, b \in \mathbb{R}$ parametry a c, d neznámé interpretujeme soustavu rovnicově

$$\begin{aligned} 3d &= a + 2b - 1, \\ 3c &= 2a + b + 1, \\ 2c - d &= a + 1, \quad a, b \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

a maticově

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 3 & a+2b-1 \\ 3 & 0 & 2a+b+1 \\ 2 & -1 & a+1 \end{array} \right) &\sim \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 0 & 2a+b+1 \\ 0 & 3 & a+2b-1 \\ 2 & -1 & a+1 \end{array} \right) \sim \\ &\sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{1}{3}(2a+b+1) \\ 0 & 1 & \frac{1}{3}(a+2b-1) \\ 2 & -1 & \frac{1}{3}(3a+3) \end{array} \right) \sim \\ &\sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{1}{3}(2a+b+1) \\ 0 & 1 & \frac{1}{3}(a+2b-1) \\ 0 & 0 & \frac{1}{3}(3a+3) - \frac{2}{3}(2a+b+1) + \frac{1}{3}(a+2b-1) \end{array} \right). \end{aligned}$$

Platí, že $\frac{1}{3}(3a+3) - \frac{2}{3}(2a+b+1) + \frac{1}{3}(a+2b-1) = 0$, tedy soustava má řešení $c = \frac{1}{3}(2a+b+1)$ a $d = \frac{1}{3}(a+2b-1)$. Tudíž $M \subseteq N$ a v důsledku $M = N$.

Afinní zobrazení

Cv. 14.6 Uvažujme dvě afinní zobrazení f, g v rovině, přičemž f představuje překlopení podle přímky $p = \{(x, 10); x \in \mathbb{R}\}$ a g představuje překlopení podle přímky $q = \{(2, y); y \in \mathbb{R}\}$.

- Najděte maticový předpis zobrazení f ,
- najděte maticový předpis zobrazení g ,
- z předchozích předpisů odvoďte maticový předpis zobrazení $f \circ g$.

Řešení:

- Zobrazení $f(x)$ můžeme zkonstruovat pomocí složení trojice jednodušších afinních zobrazení f_1, f_2, f_3 tak, že nejprve posuneme vektor x ve směru vektoru $(0, -10)^T$, provedeme překlopení podél osy x a následně posuneme daný vektor zpět o $(0, 10)^T$. Tato zobrazení můžeme vyjádřit jako

- $f_1(x) = x + (0, -10)^T$,
- $f_2(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} x = O_1 x$,
- $f_3(x) = x + (0, 10)^T$.

Dostáváme

$$\begin{aligned} f(x) &= f_3(f_2(f_1(x))) = f_3(f_2(x + (0, -10)^T)) = f_3(O_1(x + (0, -10)^T)) = \\ &= O_1(x + (0, -10)^T) + (0, 10)^T = O_1 x + (0, 10)^T + (0, 10)^T = \\ &= O_1 x + (0, 20)^T. \end{aligned}$$

- Zobrazení $g(x)$ můžeme zkonstruovat podobně jako složení g_1, g_2, g_3 , kde

- $g_1(x) = x + (-2, 0)^T$ (posunutí o $(-2, 0)^T$),
- $g_2(x) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x = O_2 x$ (překlopení podél osy y),

- $g_3(x) = x + (2, 0)^T$ (posunutí nazpět o $(2, 0)^T$).

Složením dostáváme $g(x) = g_3(g_2(g_1(x))) = O_2x + (4, 0)^T$.

(c) Složení $f \circ g$ můžeme vyjádřit jako

$$\begin{aligned} f \circ g &= f(g(x)) = f(O_2x + (4, 0)^T) = O_1(O_2x + (4, 0)^T) + (0, 20)^T = \\ &= O_1O_2x + O_1(4, 0)^T + (0, 20)^T = O_1O_2x + (4, 0)^T + (0, 20)^T = \\ &= O_1O_2x + (4, 20)^T, \end{aligned}$$

po rozepsání maticového součinu

$$(f \circ g)(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 20 \end{pmatrix}.$$

Cv. 14.7 Dokažte:

- Obráz afinního podprostoru při afinním zobrazení je afinní podprostor.
- Složením dvou afinních zobrazení dostaneme opět afinní zobrazení.
- Buď $f: U \rightarrow V$ lineární zobrazení a $v \in V$. Pak vzor vektoru v

$$f^{-1}(v) := \{u \in U ; f(u) = v\}$$

je afinní podprostor v U .

Řešení:

- Mějme vektorový prostor V a afinní podprostor

$$M = U + a = \{u + a; u \in U\},$$

kde $U \subseteq V$ a $a \in V$. Dále mějme lineární zobrazení $g: V \rightarrow W$, vektor $b \in W$ a afinní zobrazení $f: V \rightarrow W$ definované pomocí

$$f(x) = g(x) + b.$$

Dostáváme,

$$f(M) = f(U + a) = g(U + a) + b = g(U) + g(a) + b.$$

Z toho, že $g(a) + b \in W$ a $g(U) \subseteq W$ dostáváme platnost tvrzení.

- Mějme dvě afinní zobrazení $f_1: U \rightarrow V$, $f_2: V \rightarrow W$ určená pomocí lineárních zobrazení g_1, g_2 a vektorů $b_1 \in V$, $b_2 \in W$ takto:

$$f_1(x) = g_1(x) + b_1, \quad f_2(x) = g_2(x) + b_2.$$

Potom složení můžeme vyjádřit

$$\begin{aligned} (f_2 \circ f_1)(x) &= f_2(g_1(x) + b_1) = g_2(g_1(x) + b_1) + b_2 = \\ &= g_2(g_1(x)) + g_2(b_1) + b_2 = (g_2 \circ g_1)(x) + g_2(b_1) + b_2. \end{aligned}$$

Z toho, že $g_2 \circ g_1: U \rightarrow W$ je lineární zobrazení a $g_2(b_1) + b_2 \in W$ dostáváme platnost tvrzení.

(c) K důkazu využijeme charakterizaci afinních podprostorů, které říká, že M je afinní podprostor právě tehdy, když pro každé $x, y \in M$ a skalár α platí, že $\alpha x + (1 - \alpha)y \in M$.

Označme $M := f^{-1}(v)$. Pokud $x, y \in M$, potom $f(x) = v$ a $f(y) = v$. Z toho dostáváme

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) = \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y) = \alpha v + (1 - \alpha)v = v.$$

Tudíž $\alpha x + (1 - \alpha)y \in M$ a dostáváme platnost tvrzení.

Cv. 14.8 Najděte úplný vzor $f^{-1}(I_2)$ pro lineární zobrazení $f: \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}$ zadané $f(A) = \frac{1}{2}(A + A^T)$.

Řešení:

Úplným vzorem jsou všechny matice splňující vztah $f(A) = \frac{1}{2}(A + A^T) = I_2$, po složkách

$$\frac{1}{2} \left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

ekvivalentně

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \frac{a_{12}+a_{21}}{2} \\ \frac{a_{21}+a_{12}}{2} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dostáváme $a_{11} = 1$, $a_{22} = 1$ a $a_{21} = -a_{12}$, úplným vzorem je množina matic

$$f^{-1}(I_2) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -x \\ x & 1 \end{pmatrix}; x \in \mathbb{R} \right\}.$$