2. Soustavy lineárních rovnic

Cv. 2.1 Zapište rozšířenou matici soustavy

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 6, \\ -3x_1 + x_2 &= 2, \end{aligned}$$

a vyřešte soustavu Gaussovou nebo Gaussovou–Jordanovou eliminací.

Znázorněte řešení soustavy graficky jako průsečík přímek (tzv. řádkový pohled). Dále vyjádřete pravou stranu soustavy jako kombinaci sloupců matice soustavy (tzv. sloupcový pohled).

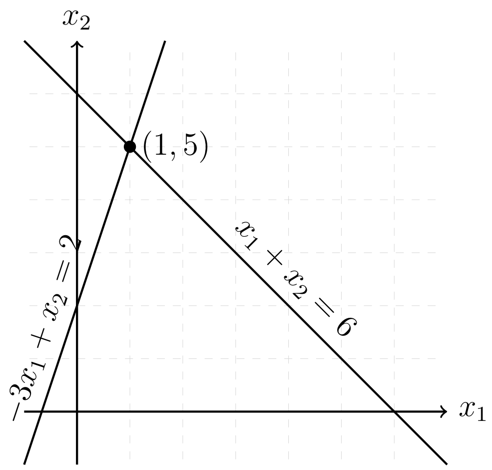
Řešení:

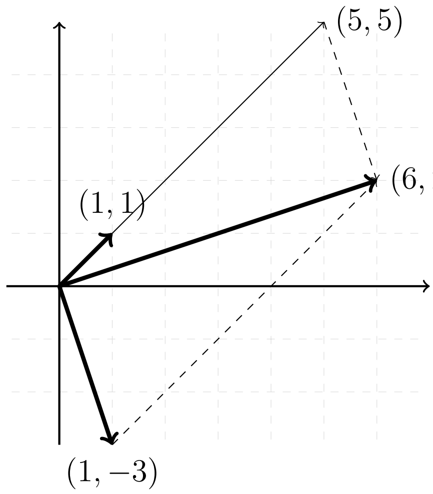
Rozšířená matice soustavy je

$$\left(\begin{array}{rr|r} 1 & 1 & 6 \\ -3 & 1 & 2 \end{array}\right).$$

Aplikací elementárních řádkových úprav snadno nalezneme řešení $(x_1, x_2) = (1, 5)$:

$$\left(\begin{array}{rr|r} 1 & 1 & 6 \\ -3 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 1 & 6 \\ 0 & 4 & 20 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{array}\right).$$





Rovnice $x_1 + x_2 = 6$ a $-3x_1 + x_2 = 2$ popisují dvě přímky v rovině, řešení soustavy $(1, 5)$ je jejich průsečíkem.

Sloupce rozšířené matice soustavy můžeme zakreslit jako vektory v rovině. Řešení soustavy pak říká, že vektor pravých stran $(6, 2)$ dostaneme sečtením (1-krát prodlouženého) vektoru $(1, -3)$ a 5-krát prodlouženého vektoru $(1, 1)$.

Cv. 2.2 Vyřešte Gaussovou nebo Gaussovou–Jordanovou eliminací následující soustavy rovnic a určete hodnost matic. Na závěr udělejte zkoušku řešení.

$$\text{(a)} \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -3 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 3 \end{array}\right), \quad \text{(b)} \left(\begin{array}{rrr|r} 5 & -3 & 6 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 3 & -1 \end{array}\right), \quad \text{(c)} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 7 \end{array}\right).$$

Řešení:

(a) Aplikací elementárních řádkových úprav převedeme rozšířenou matici soustavy do odstupňovaného tvaru:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -3 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 3 & 3 \\ 2 & -3 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & 5 & -10 & -10 \end{array}\right) \sim$$
$$\sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -20 & -30 \end{array}\right).$$

Zpětnou substitucí získáme jediné řešení soustavy $(x_1, x_2, x_3) = (-\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2})$. Alternativně můžeme také použít Gaussovu–Jordanovu eliminaci a převést matici do redukovaného odstupňovaného tvaru

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} \end{array}\right).$$

Hodnost matice je daná počtem nenulových řádků (počtem pivotů) odstupňovaného tvaru. V tomto případě platí $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(A \mid b) = 3$.

Dosazením ověříme, že vektor $(x_1, x_2, x_3) = (-\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2})$ opravdu vyhovuje soustavě (ale už neověříme, zda potenciálně neexistuje nějaké další řešení).

(b) Opět upravíme matici pomocí elementárních řádkových úprav:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 5 & -3 & 6 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 3 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 5 & -3 & 6 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 7 & 1 & -13 \\ 0 & 7 & 1 & -7 \end{array}\right) \sim$$
$$\sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 7 & 1 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right).$$

Poslední řádek upravené matice reprezentuje rovnici $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 5$, soustava tedy nemá řešení.

Vidíme, že se v posledním sloupci upravené matice nachází pivot a hodnost rozšířené matice soustavy je $\operatorname{rank}(A \mid b) = 3$, zatímco $\operatorname{rank}(A) = 2$.

(c) Aplikací elementárních úprav převedeme matici na tvar:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Nyní použijeme zpětnou substituci. Z druhého řádku vyjádříme $x_2 = 3 - 2x_3$, přičemž volnou proměnnou x_3 ponecháme jako parametr. Nakonec z prvního řádku dostaneme $x_1 = 1 + x_3$. Soustava má tedy nekonečně mnoho řešení ve tvaru

$$(x_1, x_2, x_3) = (1 + x_3,\ 3 - 2x_3,\ x_3) = (1, 3, 0) + x_3 \cdot (1, -2, 1).$$