4. Regulární a inverzní matice

Cv. 4.1 Otestujte regularitu matice $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Řešení:
Regularitu matice můžeme otestovat pomocí hodnosti matice. Převedeme matici na odstupňovaný tvar:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{5}{3} \end{pmatrix}.$$

Matice má plnou hodnost, tedy je regulární.

Cv. 4.2 Rozhodněte, kdy je trojúhelníková matice regulární.

Řešení:
Horní trojúhelníková matice je již (skoro) v odstupňovaném tvaru. Pokud jsou diagonální prvky nenulové, pak to jsou pivoty a matice je regulární. Pokud alespoň jeden diagonální prvek je nulový, pak v příslušném sloupci není pivot, a tím pádem je matice singulární.

Pro dolní trojúhelníkovou matici je situace podobná. Matici transponujeme a převedeme tím na předchozí případ.

Cv. 4.3 Dokažte, že následující matice jsou singulární, a to tak, že najdete nenulové řešení soustavy $Ax = 0$:

(a) matice A má nulový i-tý sloupec tj. $A_{*i} = 0$;

(b) matice A má i-tý a j-tý sloupec shodný, tj. $A_{*i} = A_{*j}$ pro $i \neq j$.

Řešení:

(a) $x = e_i$;

(b) $x = e_i - e_j$.

Cv. 4.4 Najděte inverzní matici k maticím

(a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 10 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix}$