6. Permutace

Cv. 6.1 Mějme permutace

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 6 & 5 \end{pmatrix}, \quad q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 2 & 5 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

Najděte jejich cykly, znaménka, inverze a složte permutace p, q mezi sebou v obou pořadích.

Řešení:
Permutace p zobrazuje $1 \to 2$, dále $2 \to 3$, $3 \to 4$ a $4 \to 1$. Tudíž jeden cyklus je $(1, 2, 3, 4)$, analogicky druhý cyklus je $(5, 6)$. Tudíž zápis permutace pomoci cyklů je $p = (1, 2, 3, 4)(5, 6)$.

Podobně pro permutaci q máme $1 \to 1$ (první cyklus), $2 \to 3$, $3 \to 2$ (druhý cyklus) a $4 \to 5$, $5 \to 6$, $6 \to 4$ (třetí cyklus). Permutaci q lze zapsat pomocí cyklů jako $q = (1)(2, 3)(4, 5, 6)$.

Permutace p je zadána na $n = 6$ prvcích a skládá se ze $c = 2$ cyklů, proto má znaménko $\operatorname{sgn}(p) = (-1)^{n-\text{počet cyklů}} = (-1)^{6-2} = 1$. Podobně spočítáme $\operatorname{sgn}(q) = (-1)^{6-3} = -1$.

Inverzní permutaci k permutaci p můžeme najít několika způsoby. Pokud vyjdeme z tabulkového zadání p, tak stačí prohodit oba řádky, čímž se ze vzorů stanou obrazy a naopak, a pak jen setřídit sloupce od nejmenšího po největší. Dostaneme p^{-1} vyjádřené tabulkou

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & 2 & 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}.$$

Pokud využijeme zápisu p pomocí cyklů, stačí pouze prohodit pořadí čísel v každém cyklu, tj. $p^{-1} = (4, 3, 2, 1)(6, 5)$. Zde si můžeme uvědomit, že cykly délek 1 a 2 nemusíme invertovat, protože jsou sami sobě inverzní.

Permutace skládáme jako každé jiné zobrazení, tedy $p \circ q$ zobrazí prvek i na $p(q(i))$. Tabulkově vyjádřeno

$$\begin{array}{ccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ q & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ & 1 & 3 & 2 & 5 & 6 & 4 \\ p & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ & 2 & 4 & 3 & 6 & 5 & 1 \end{array}$$

čili

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 3 & 6 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Podobně můžeme postupovat pomocí popisu přes cykly a dospějeme k vyjádření $p \circ q = (1, 2, 4, 6)(3)(5)$. Pro srovnání, složení v opačném pořadí je $q \circ p = (1, 3, 5, 4)(2)(6)$. To ilustruje, že skládání permutací není komutativní.

Cv. 6.2 Mějme permutaci
$$p = (1, 3, 4)(2, 5)(6, 11, 10, 9, 8, 7).$$

Spočítejte permutace p^9 a p^{-14}.

Pro jakou nejmenší mocninu $k \geq 1$ dostaneme $p^k = id$?

Řešení:
Naivní způsob spočítání p^9 je složit postupně permutaci $p^9 = p \circ p \circ p \circ p \circ p \circ p \circ p \circ p \circ p$.

Efektivnější způsob počítání vysokých mocnin (čehokoli) je využití dvojkového zápisu exponentu a iterovaného mocnění na druhou. Konkrétně k permutaci p^9 se dostaneme tak, že spočítáme $p^2 = p \circ p$, následně $p^4 = p^2 \circ p^2$, $p^8 = p^4 \circ p^4$ a nakonec $p^9 = p^8 \circ p$.

V našem případě, kdy mocníme permutace, můžeme využít ještě rozkladu na cykly. Cyklus $p = (u_1, \dots, u_k)$ délky k se při mocnění chová tak, že $p^k = id$ a $p^{k+1} = p$. To nás vede k metodě, kdy budeme mocnit každý cyklus zvlášť a mocninu daného cyklu spočítáme efektivně s využitím modula jeho délky. Konkrétně, $(1, 3, 4)^9 = id$, $(2, 5)^9 = (2, 5)^1 = (2, 5)$ a $(6, 11, 10, 9, 8, 7)^9 = (6, 11, 10, 9, 8, 7)^3 = (6, 9)(7, 10)(8, 11)$ Tudíž
$$p^9 = (1)(2, 5)(3)(4)(6, 9)(7, 10)(8, 11).$$

Permutaci p^{-14} určíme stejným způsobem s tím, že uvažujeme i záporné exponenty. Tudíž $(1, 3, 4)^{-14} = (1, 3, 4)^1$, $(2, 5)^{-14} = (2, 5)^0 = id$, $(6, 11, 10, 9, 8, 7)^{-14} = (6, 11, 10, 9, 8, 7)^4 = (6, 8, 10)(7, 9, 11)$. Nakonec dostáváme
$$p^{-14} = (1, 3, 4)(2)(5)(6, 8, 10)(7, 9, 11).$$

Abychom určili nejmenší mocninu $k \geq 1$ takovou, že $p^k = id$, podíváme se na jednotlivé cykly a zjistíme, jaké mocniny dají identitu. První cyklus má délku 3, tedy třetí mocnina a jakýkoli její celý násobek dají identitu. Podobně druhý cyklus má délku 2, čili identitu dostaneme pro sudé mocniny, a konečně třetí cyklus délky 6 vede na mocninu 6. Nejmenší společný násobek čísel $2, 3, 6$ je 6, tedy hledané $k = 6$. Při šesté mocnině se první cyklus *protočí* 2-krát, druhý 3-krát a poslední 1-krát.

Cv. 6.3 Rozložte permutaci $(1, 2, 3, 4, 5)$ na složení transpozic, a to alespoň dvěma různými způsoby. Jaký je nejmenší možný počet transpozic, které k rozkladu potřebujeme?

Řešení:
Dvě možná řešení jsou:
$$(1, 2, 3, 4, 5) = (1, 2)(2, 3)(3, 4)(4, 5) = (1, 5)(1, 4)(1, 3)(1, 2).$$

Transpozic musí být alespoň 4. Každá nová transpozice sníží počet cyklů maximálně o 1, takže abychom z identity zkonstruovali cyklus délky 5, potřebujeme alespoň 4 transpozice.

Cv. 6.4 Dokažte, že každou permutaci $p \in S_n$ lze složit pomocí nanejvýš $n-1$ transpozic.

Obecně, permutace $p \in S_n$ se skládá z k cyklů. Pomocí kolika transpozic se dá složit? Najděte všechny možnosti.

Řešení:
V předchozím cvičení 6.3 jsme viděli, že každý cyklus délky c lze složit pomocí $c-1$ transpozic. Pokud se tedy permutace p skládá z právě k cyklů, tak ji umíme složit z právě $n-k$ transpozic. Tím pádem každou permutaci lze zložit z maximálně $n-1$ transpozic.

Vždycky lze přidat dodatečné (a v zásadě zbytečné) páry transpozic $(i,j)(i,j)$ a počet transpozic tím navýšit. Není ale možné změnit paritu počtu transpozic (tím by se změnilo znaménko permutace). Možné počty transpozit, ze kterých můžeme p složit, jsou tedy $n-k$, $n-k+2$, $n-k+4, \dots$

Cv. 6.5 Určete znaménko permutace r zadané tabulkou:

$$r = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ n & n-1 & n-2 & \dots & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Řešení:
Permutaci r můžeme pomocí cyklů zapsat jako

$$r = \begin{cases} (1,n)(2,n-1)\dots(\frac{n}{2},\frac{n+2}{2}) & \text{pro } n \text{ sudé,} \\ (1,n)(2,n-1)\dots(\frac{n-1}{2},\frac{n+3}{2})(\frac{n+1}{2}) & \text{pro } n \text{ liché.} \end{cases}$$

V prvním případě máme $\frac{n}{2}$ cyklů, v druhém $\frac{n-1}{2}$ cyklů. Celkově tedy dostáváme, že

$$\operatorname{sgn}(r) = (-1)^{n-\text{počet cyklů}} = \begin{cases} (-1)^{n-\frac{n}{2}} = (-1)^{\frac{n}{2}} & \text{pro } n \text{ sudé,} \\ (-1)^{n-\frac{n-1}{2}} = (-1)^{\frac{n-1}{2}} & \text{pro } n \text{ liché.} \end{cases}$$

Souhrnně můžeme též psát $\operatorname{sgn}(r) = (-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$.

Cv. 6.6 Najděte všechny permutace splňující $p \in S_{10}$ a $p^2 = (1,3)(2,4)(7,8,9,10)$.

Řešení:
Podívejme se nejprve, jak může vzniknout cyklus $(1,3)$. Aby se 1 zobrazilo na 3 v p^2, musí v p být součástí nějaké cyklu $(\dots,1,a,3,\dots)$. Podobně aby se 3 zobrazilo na 1, musí být $(\dots,3,b,1,\dots)$. Spojením obou úseků dostáváme $(\dots,1,a,3,b,1,\dots)$, tedy nutně cyklus $(1,a,3,b)$. V permutaci p^2 se tento cyklus rozpadne na 2 podcykly $(1,3)(a,b)$. Ze struktury p^2 je jediná možnost, že $a = 2, b = 4$ nebo symetricky $a = 4, b = 2$.

Aby se dále prvky 5 a 6 zobrazily v p^2 sami na sebe, musí se buď oba zobrazit sami na sebe už v p, nebo tvořit cyklus o dvou prvcích $(5,c),(6,d)$. Pokud by libovolné z čísel byl součástí delšího cyklu, složením permutace sama se sebou bychom už nedostali (5), resp. (6). Ze struktury p^2 dále nutně vyplývá, že $c = 6$ a $d = 5$, jinak by (d) a (c) nebyly cykly z p^2.

Zbývá určit $p(7),\dots,p(10)$. Podobně jako v případě prvků 1, 3 odvodíme, že musí existovat úsek $(\dots,7,e,8,f,9,g,10,h,7,\dots)$, resp. cyklus $(7,e,8,f,9,q,10,h,7)$, který ale nejsme schopni pouze s pomocí prvků $7, \ldots, 10$ zkonstruovat. Z toho důvodu žádná permutace p nesplňuje zadání.

Poznámka. Znaménko permutace p^2 je vždy sudé (pro libovolnou permutaci p), neboť platí $\mathrm{sgn}(p^2) = \mathrm{sgn}(p)\,\mathrm{sgn}(p) = \mathrm{sgn}(p)^2 = 1$. Ale zadaná permutace $(1,3)(2,4)(7,8,9,10)$ má znaménko $(-1)^{10-5} = -1$, tudíž nemůže být druhou mocninou žádné permutace.

Cv. 6.7 Dokažte, že složením permutací dostaneme permutaci.

Řešení:
Abychom dokázali toto tvrzení, stačí ukázat, že složení dvou permutací $p, q \in S_n$ je *prosté* a *na*. Poté se bude jednat o bijekci na konečné množině, což odpovídá definici permutace. Toto půjde jednoduše dokázat z faktu, že obě permutace tyto vlastnosti splňují.

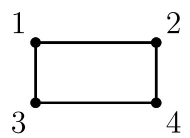
Prosté: Mějme $x, y \in \{1, \ldots, n\}$ a nechť platí

$$(p \circ q)(x) = p(q(x)) = p(q(y)) = (p \circ q)(y).$$

Protože zobrazení p je prosté, platí, že nutně $q(x) = q(y)$. Nyní využijeme toho, že je prosté q a tedy platí, že $x = y$. Tedy i zobrazení $(p \circ q)$ je prosté.

Na: Aby platila tato vlastnost, musí pro každé $x \in \{1, \ldots n\}$ existovat prvek $y \in \{1, \ldots, n\}$ takový, že $(p \circ q)(y) = p(q(y)) = x$. Protože zobrazení p je „na“, tak existuje $z \in \{1, \ldots, n\}$ takové, že $p(z) = x$. Zároveň z vlastnosti na permutace q existuje y, že $q(y) = z$. Toto y splňuje tedy vztah $q(p(y)) = x$.

Cv. 6.8 Najděte všechny symetrie obdélníku, popište je permutacemi a ověřte, že tvoří podgrupu grupy $(S_4, \circ)$.

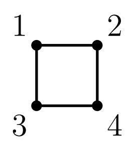


Řešení:
Obdélník má čtyři symetrie:

- identita, která odpovídá permutaci $id = (1)(2)(3)(4)$,
- překlopení podle svislé osy odpovídá permutaci $(1,2)(3,4)$,
- překlopení podle vodorovné osy odpovídá permutaci $(1,3)(2,4)$,
- otočení o $180°$ odpovídá permutaci $(1,4)(2,3)$.

Snadno ověříme, že tato množina permutací je uzavřená na inverze a skládání, čili tvoří podgrupu.

Cv. 6.9 Najděte všechny symetrie čtverce, popište je permutacemi a ověřte, že tvoří podgrupu grupy $(S_4, \circ)$.



Řešení:
Analogické předchozímu cvičení 6.8. Kromě tamějších symetrií zde máme navíc:

- překlopení podle diagonály, což odpovídá permutaci $(1,4)(2)(3)$,
- překlopení podle šikmé diagonály, což odpovídá permutaci $(1)(4)(2,3)$,
- otočení o 90° ve směru hodinových ručiček, což odpovídá $(1,2,4,3)$,
- otočení o 90° proti směru hodinových ručiček, což odpovídá $(1,3,4,2)$.

Opět ověříme, že tato množina osmi permutací je uzavřená na inverze a skládání, takže tvoří podgrupu.