

6. Permutace

Cv. 6.1 Mějme permutace

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 6 & 5 \end{pmatrix}, \quad q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 2 & 5 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

Najděte jejich cykly, znaménka, inverze a složte permutace p, q mezi sebou v obou pořadích.

Řešení:

Permutace p zobrazuje $1 \rightarrow 2$, dále $2 \rightarrow 3$, $3 \rightarrow 4$ a $4 \rightarrow 1$. Tudíž jeden cyklus je $(1, 2, 3, 4)$, analogicky druhý cyklus je $(5, 6)$. Tudíž zápis permutace pomocí cyklů je $p = (1, 2, 3, 4)(5, 6)$.

Podobně pro permutaci q máme $1 \rightarrow 1$ (první cyklus), $2 \rightarrow 3$, $3 \rightarrow 2$ (druhý cyklus) a $4 \rightarrow 5$, $5 \rightarrow 6$, $6 \rightarrow 4$ (třetí cyklus). Permutaci q lze zapsat pomocí cyklů jako $q = (1)(2, 3)(4, 5, 6)$.

Permutace p je zadána na $n = 6$ prvcích a skládá se ze $c = 2$ cyklů, proto má znaménko $\text{sgn}(p) = (-1)^{n-\text{počet cyklů}} = (-1)^{6-2} = 1$. Podobně spočítáme $\text{sgn}(q) = (-1)^{6-3} = -1$.

Inverzní permutaci k permutaci p můžeme najít několika způsoby. Pokud vyjdeme z tabulkového zadání p , tak stačí prohodit oba řádky, čímž se ze vzorů stanou obrazy a naopak, a pak jen setřídít sloupce od nejmenšího po největší. Dostaneme p^{-1} vyjádřené tabulkou

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & 2 & 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}.$$

Pokud využijeme zápisu p pomocí cyklů, stačí pouze prohodit pořadí čísel v každém cyklu, tj. $p^{-1} = (4, 3, 2, 1)(6, 5)$. Zde si můžeme uvědomit, že cykly délek 1 a 2 nemusíme invertovat, protože jsou sami sobě inverzní.

Permutace skládáme jako každé jiné zobrazení, tedy $p \circ q$ zobrazí prvek i na $p(q(i))$. Tabulkově vyjádřeno

$$\begin{array}{cccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ q & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ & 1 & 3 & 2 & 5 & 6 & 4 \\ p & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ & 2 & 4 & 3 & 6 & 5 & 1 \end{array}$$

čili

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 3 & 6 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Podobně můžeme postupovat pomocí popisu přes cykly a dospějeme k vyjádření $p \circ q = (1, 2, 4, 6)(3)(5)$. Pro srovnání, složení v opačném pořadí je $q \circ p = (1, 3, 5, 4)(2)(6)$. To ilustruje, že skládání permutací není komutativní.