7. Vektorové prostory a podprostory, lineární obal

Vektorové prostory a podprostory

Cv. 7.1 Rozhodněte, zda tvoří vektorový prostor:

(a) $\mathbb{Z}_p^n$ nad $\mathbb{Z}_p$,

(b) $\mathbb{R}^n$ nad $\mathbb{Q}$,

(c) $\mathbb{Q}^n$ nad $\mathbb{R}$,

(d) $\mathbb{R}^n$ nad $\mathbb{R}$ s operacemi $x \oplus y = x + y$, $\alpha \odot x = -\alpha \cdot x$,

(e) $\mathbb{R}^n$ nad $\mathbb{R}$ s operacemi $x \oplus y = x + y$, $\alpha \odot x = |\alpha| \cdot x$,

(f) $U \times V$ nad $\mathbb{T}$, kde U, V jsou vektorové prostory nad $\mathbb{T}$, sčítání a násobení je definováno standardně po složkách.

(g) množina všech zobrazení $f \colon M \to V$ nad tělesem $\mathbb{T}$, kde M je daná množina a V vektorový prostor nad $\mathbb{T}$.

Řešení:

(a) Jedná se o vektorový prostor, protože

- $(\mathbb{Z}_p^n, +_{\bmod p})$ je Abelova grupa,
- modulární násobení je asociativní,
- roli neutrálního prvku pro modulární násobení zastává $1 \in \mathbb{Z}_p^n$,
- modulární aritmetika je distributivní.

(b) Jedná se o vektorový prostor, protože $\mathbb{R}^n$ nad $\mathbb{Q}$ má pro operace sčítání a násobení skalárem stejná vlastnosti jako vektorový prostor $\mathbb{R}^n$ nad $\mathbb{R}$. Potenciálně jediný problém by mohl být použití jiného tělesa, protože bychom mohli při násobení skalárem dostat vektory mimo $\mathbb{R}^n$. Protože $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$, tento problém nenastane.

(c) Narozdíl od předchozího případu zde už problém nastane. Nejedná se o vektorový prostor, protože při násobení vektoru skalárem se nejedná o operaci $\mathbb{R} \times \mathbb{Q}^n \to \mathbb{Q}^n$; můžeme dostat ve vektoru reálné složky. Není splněna uzavřenost množiny na danou operaci.

(d) Není vektorový prostor, protože neplatí asociativita násobení:

$$\alpha \odot (\beta \odot v) = \alpha \odot (-\beta v) = \alpha\beta v \neq -\alpha\beta v = (\alpha\beta) \odot v.$$

Jako konkrétní protipříklad stačí vzít $\alpha = \beta = 1$ a $v = (1,1)^T$.

(e) Není vektorový prostor, protože neplatí distributivita. Pro jakékoli $\beta = -\alpha \neq 0$ dostáváme

$$(\alpha + \beta) \odot v = |0|v = 0 \neq 2|\alpha|v = |\alpha|v + |-\alpha|v = \alpha \odot v + \beta \odot v.$$

Konkrétně například stačí vzít $\alpha = 1$, $\beta = -1$, $v = (1,1)^T$.

(f) Prvky množiny $U \times V$ jsou uspořádané dvojice (u, v), kde $u \in U$, $v \in V$. Pro $(u, v), (u', v') \in U \times V$ je součet definován takto: $(u, v) + (u', v') = (u + u', v + v')$. Násobek je definován analogicky $\alpha(u, v) = (\alpha u', \alpha v)$, kde $\alpha \in \mathbb{T}$ a $(u, v) \in U \times V$.

Vlastnosti operací $U \times V$ nad $\mathbb{T}$ plynou z vlastností operací pro jednotlivé prostory U a V, takže se jedná vektorový prostor.

(g) Pokud není uvedeno jinak, uvažujeme přirozené definice operací sčítání a násobení funkcí, tedy

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad (\alpha f)(x) = f(x).$$

Následně o dvou funkcích řekneme, že se rovnají, pokud se rovnají jejich funkční hodnoty na všech $x \in M$. Daná struktura je vektorový prostor, protože platí

i. asociativita sčítání

$$((f + g) + h)(x) = (f + g)(x) + h(x) = f(x) + g(x) + h(x),$$

$$(f + (g + h))(x) = f(x) + (g + h)(x) = f(x) + g(x) + h(x),$$

ii. neutrální prvek pro sčítání je funkce $e(x) = o$, kde o je nulový vektor prostoru V,

iii. inverzní prvek f^{-1} k funkci f je $f^{-1}(x) = -1 \cdot f(x)$,

iv. komutativita sčítání

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = g(x) + f(x) = (g + f)(x),$$

v. asociativita násobení skalárem

$$(\alpha(\beta f))(x) = \alpha(\beta f)(x) = \alpha\beta f(x) = (\alpha\beta)f(x) = ((\alpha\beta)f)(x),$$

vi. neutrální prvek pro násobení skalárem je $1 \in \mathbb{T}$,

vii. distributivita

$$((\alpha + \beta)f)(x) = (\alpha + \beta)f(x) = \alpha f(x) + \beta f(x) = (\alpha f)(x) + (\beta f)(x),$$

viii. distributivita

$$\begin{aligned}(\alpha(f + g))(x) &= \alpha(f + g)(x) = \alpha(f(x) + g(x)) = \\ &= \alpha f(x) + \alpha g(x) = (\alpha f)(x) + (\alpha g)(x).\end{aligned}$$

Cv. 7.2 Najděte netriviální podmnožinu $\mathbb{R}^2$, která je:

(a) uzavřená na sčítání a odčítání, ale ne na násobky,

(b) uzavřená na násobky, ale ne na sčítání.

Řešení:

(a) Např. množina $\{(i, i)^T \mid i \in \mathbb{Z}\}$.

(b) Např. sjednocení dvojice různoběžných přímek procházejících počátkem.

Cv. 7.3 Rozhodněte, zda následující množiny vektorů tvoří podprostor $\mathbb{R}^2$:

(a) $\{(s, 5s)^T;\ s \in \mathbb{R}\}$,

(b) $\{(s+t, 1)^T;\ s, t \in \mathbb{R}\}$,

(c) $\{(s, s^2)^T;\ s \in \mathbb{R}\}$,

(d) $\{(s-t, 2t)^T;\ s, t \in \mathbb{R}\}$.

Řešení:

Aby množina tvořila podprostor $\mathbb{R}^2$, je třeba, aby obsahovala $(0,0)^T$ a byla uzavřená na operace sčítání a násobení skalárem.

(a) Nulový vektor v množině pro $s = 0$ leží. Uzavřenost na součty a součiny také platí:

- $(s, 5s)^T + (t, 5t)^T = (s+t, 5(s+t))^T$,
- $\alpha(s, 5s)^T = (\alpha s, 5\alpha s)^T$.

Jedná se tedy o vektorový podprostor prostoru $\mathbb{R}^2$.

(b) Není podprostorem, neboť $(0,0)^T$ není součástí množiny.

(c) Není podprostorem, neboť množina není uzavřena ani na násobky, ani na součty. Například vektor $(1,1)^T$ leží v množině, ale její násobek $(2,2)^T$ už nikoli.

(d) Nulový vektor v množina pro $t = 0$, $s = 0$ leží. Uzavřenost na součty a součiny také platí:

- $(a-b, 2b)^T + (c-d, 2d)^T = ((a+c)-(b+d), 2(b+d))^T$,
- $\alpha(t-s, 2s)^T = (\alpha t - \alpha s, 2\alpha s)^T$.

Cv. 7.4 Buď $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Dokažte, že $\{x \in \mathbb{R}^n;\ Ax = 0\}$ tvoří vektorový podprostor $\mathbb{R}^n$.

Řešení:

Aby množina tvořila podprostor, musí obsahovat nulový vektor a být uzavřená na operace sčítání a násobení skalárem.

Pokud dosadíme do soustavy rovnic vektor $x = (0,\ldots,0)^T$, dostáváme na levé straně soustavy nuly, tedy nulový vektor je řešením libovolné soustavy rovnic s nulovou pravou stranou.

Uzavřenost na násobky. Pokud $x \in \mathbb{R}^n$ splňuje $Ax = 0$, po dosazení αx, kde $\alpha \in \mathbb{R}$ je libovolné, dostáváme

$$A(\alpha x) = \alpha(Ax) = \alpha 0 = 0.$$

Obdobně pro součty. Pro libovolné $x, y \in \mathbb{R}^n$ splňující soustavu rovnic platí $Ax = Ay = 0$. Tudíž

$$A(x+y) = Ax + Ay = 0 + 0 = 0.$$

Cv. 7.5 Nalezněte vlastní příklady podprostorů prostoru matic $\mathbb{R}^{n\times n}$ nad $\mathbb{R}$.

Řešení:

- Triviální příklady jsou celý prostor $\mathbb{R}^{n\times n}$ nad $\mathbb{R}$, nebo množina $\{0_{n\times n}\}$.
- Netriviálním příkladem jsou poté horní (nebo dolní) trojúhelníkové matice, neboť násobení skalárem, ani součet dvou matic nezmění nulovost prvků pod diagonálou.
- Z podobného důvodu tvoří podprostor diagonální matice.
- Obecněji bychom mohli vzít libovolnou podmnožinu matic, kde určité členy zafixujeme rovny 0 a zbytek členů bude nabývat libovolných hodnot.
- Jiným příkladem jsou magické čtverce (tj. matice u nichž součet libovolného řádku, sloupce i obou diagonál dá stejné číslo).

Cv. 7.6 Rozhodněte, zda následující tvoří podprostor prostoru reálných posloupností $\mathbb{R}^\infty = \{(x_1, x_2, \dots); x_i \in \mathbb{R}, i \in \mathbb{N}\}$:

(a) posloupnosti s nekonečně mnoha nulami,
(b) posloupnosti s konečně mnoha nenulami,
(c) monotónní posloupnosti (neklesající a nerostoucí posloupnosti čísel),
(d) fibonacciovské posloupnosti (splňující $x_{i+1} = x_i + x_{i-1}$, kde $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ jsou libovolné).

Řešení:

(a) Ne, nejsou uzavřené na součet.
Například $(0, 1, 0, 1, \dots) + (1, 0, 1, 0, \dots) = (1, 1, 1, 1, \dots)$
(b) Ano, snadno nahlédneme.
(c) Ne, nejsou uzavřené na součty.
Například $(1, 0, 0, 0, \dots) + (0, 0, 1, 1, \dots) = (1, 0, 1, \dots)$.
(d) Ano, snadno nahlédneme.

Lineární obal, lineární kombinace

Cv. 7.7 Buď V vektorový prostor a $M, N \subseteq V$ množiny vektorů. Rozhodněte, zda platí

(a) $\mathrm{span}(\mathrm{span}(M)) = \mathrm{span}(M)$,
(b) $M \subseteq N \ \Rightarrow\ \mathrm{span}(M) \Subset \mathrm{span}(N)$,
(c) $M \subseteq N \ \Leftarrow\ \mathrm{span}(M) \Subset \mathrm{span}(N)$,
(d) $\mathrm{span}(M \cap N) = \mathrm{span}(M) \cap \mathrm{span}(N)$,

Řešení:

Ukážeme dva možné způsoby řešení, podle toho, jakou charakterizaci lineárního obalu použijeme.

První způsob. Podle první definice je lineární obal $\mathrm{span}(M)$ množiny M tvořený průnikem všech podprostorů, obsahujících množinu M. Jinými slovy, $\mathrm{span}(M)$ je (co do inkluze) nejmenší podprostor obsahující M.

(a) Ano. Množina $\mathrm{span}(M)$ je již podprostor, tudíž jeho lineární obal je on sám.

(b) Ano. Pokud podprostor U obsahuje množinu N, pak obsahuje i množinu M. Tudíž při konstrukci lineárního obalu $\mathrm{span}(M)$ děláme průnik z týchž podprostorů, jako při konstrukci $\mathrm{span}(N)$, plus případně ještě z nějakých navíc. Proto $\mathrm{span}(M) \Subset \mathrm{span}(N)$.

(c) Tento vztah obecně neplatí. Vezměme například množiny $M = V$ a $N = M \setminus \{o\}$. Platí, že $\mathrm{span}(M) = \mathrm{span}(N)$, tím pádem i $\mathrm{span}(M) \Subset \mathrm{span}(N)$, ale zároveň neplatí $M \subseteq N$.

(d) Vztah obecně neplatí. Například pro $M = \{(1,0)^T, (0,1)^T\}$ a $N = \{(1,1)^T\}$. Zatímco $\mathrm{span}(M \cap N) = \{o\}$, tak $\mathrm{span}(M) \cap \mathrm{span}(N) = \mathrm{span}(N) = \{(c,c)^T;\ c \in \mathbb{R}\}$.

Druhý způsob. Zde vycházíme z tvrzení, že $x \in \mathrm{span}(M)$ právě tehdy, pokud existuje $k \in \mathbb{N}$, vektory $x_1, \ldots, x_k \in M$ a koeficienty $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ takové, že

$$x = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i.$$

(a) Ukážeme nejprve, že $\mathrm{span}(M) \Subset \mathrm{span}(\mathrm{span}(M))$, tedy že

$$x \in \mathrm{span}(M) \quad \Rightarrow \quad x \in \mathrm{span}(\mathrm{span}(M)).$$

Protože $x \in \mathrm{span}(M)$, dá se vyjádřit jako $x = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i$ pro $x_i \in M$. Protože ale $x_i \in \mathrm{span}(M)$ a platí $x = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i$, dostáváme z tvrzení výše, že $x \in \mathrm{span}(\mathrm{span}(M))$.

Naopak pokud $x \in \mathrm{span}(\mathrm{span}(M))$, poté existují $x_1, \ldots, x_k \in \mathrm{span}(M)$ a $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ takové, že $x = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i$. Každé $x_i \in \mathrm{span}(M)$ můžeme vyjádřit jako $x_i = \sum_{j=1}^{\ell_i} \beta_{ij} y_{ij}$ pro jisté $y_{ij} \in M$. Po dosazení dostáváme

$$x = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \left(\sum_{j=1}^{\ell_i} \beta_{ij} y_{ij} \right) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{\ell_i} (\alpha_i \beta_{ij}) y_{ij}.$$

Toto je lineární kombinace vektorů $y_{ij} \in M$ s koeficienty $\alpha_i \beta_{ij}$, tedy $x \in \mathrm{span}(M)$.

(b) Každý vektor $x \in \mathrm{span}(M)$ můžeme vyjádřit jako $x = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i$ pro určité $x_i \in M$ a $k \in \mathbb{N}$. Protože $M \subseteq N$, platí také, že $x_i \in N$, tedy $x \in \mathrm{span}(N)$.

(c) Již jsme nahlédli protipříkladem v první části.

(d) Již jsme nahlédli protipříkladem v první části.

Cv. 7.8 Rozhodněte, zda vektory $(1,2)^T$ a $(3,4)^T$ generují $\mathbb{R}^2$.

<u>Řešení:</u>

Aby dané vektory generovaly $\mathbb{R}^2$, musí jít každý vektor $(a,b)^T \in \mathbb{R}^2$ vyjádřit jako jejich lineární kombinace, tj.

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Pokud rovnost vektorů rozepíšeme po složkách, dostáváme soustavu

$$\begin{aligned} \alpha + 3\beta &= a \\ 2\alpha + 4\beta &= b, \end{aligned}$$

kde α, β jsou neznámé. Maticově můžeme soustavu přepsat a vyřešit jako

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & a \\ 2 & 4 & b \end{array}\right).$$

Protože je matice soustavy regulární, má soustava jediné řešení pro jakékoli hodnoty $a, b \in \mathbb{R}$. Každý vektor lze tedy pomocí zadané dvojice jednoznačně generovat. K tomuto závěru nepotřebujeme znát přesný tvar řešení soustavy. Na druhou stranu, řešení soustavy nám dává dodatečnou informaci, a to koeficienty příslušné lineární kombinace. V našem případě je řešení $\alpha = -(2a + \frac{3b}{2})$, $\beta = \frac{2a-b}{2}$.

Cv. 7.9 Rozhodněte, zda existuje lineární kombinace zadaných vektorů dávající vektor $x = (1, 2, 3)^T$ a pokud ano, tak ji najděte:

(a) $(1, 1, 1)^T, (2, 1, 3)^T, (3, 1, 5)^T$

(b) $(2, 1, 3)^T, (3, 1, 2)^T, (1, 1, 1)^T$.

Řešení:
K řešení využijeme postupu z předchozí úlohy, tedy převedení problému hledání koeficientů lineární kombinace na řešení soustavy lineárních rovnic.

(a) Dostáváme soustavu

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 5 & 3 \end{array}\right),$$

která nemá řešení, protože ji můžeme převést Gaussovou eliminací například na tvar

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right).$$

Hledaná lineární kombinace tudíž neexistuje.

(b) Dostáváme soustavu

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right),$$

která má jednoznačné řešení, protože ji můžeme převést Gaussovou eliminací například na tvar

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & -6 \end{array}\right).$$

Řešením je vektor $(1, -1, 2)^T$, tedy platí, že

$$1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$