

## 8. Lineární závislost a nezávislost

**Cv. 8.1** Diskutujte, kdy je systém jednoho resp. dvou resp. tří vektorů lineárně závislý.

**Řešení:**

1 vektor: Aby množina s jedním vektorem byla lineárně závislá, tak ten vektor musí být nulový.

2 vektory: Aby množina dvou vektorů byla lineárně závislá, jeden vektor musí být násobek druhého.

3 vektory: V tomto případě jeden vektor je lineární kombinací ostatních, ale nemusí být nutně jeden vektor násobek nějakého jiného.

**Cv. 8.2** Zjistěte zda jsou vektory z  $\mathbb{R}^3$  lineárně nezávislé:

(a)  $(2, 3, -5)^T, (1, -1, 1)^T, (3, 2, -2)^T$ .

(b)  $(2, 0, 3)^T, (1, -1, 1)^T, (0, 2, 1)^T$ .

**Řešení:**

Vektory  $x_1, \dots, x_k$  jsou lineárně nezávislé, pokud jediná lineární kombinace

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i x_i = 0$$

má všechny koeficienty  $\alpha_1 = \dots = \alpha_k = 0$ . Problém nalezení koeficientů této lineární kombinace převedeme na hledání řešení soustavy lineárních rovnic.

(a) Hledáme koeficienty  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$  takové, že

$$\alpha_1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} + \alpha_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Převedením na řešení soustav lineárních rovnic dostáváme

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ -5 & 1 & -2 & 0 \end{array} \right).$$

Jediným řešením této soustavy je vektor  $(0, 0, 0)^T$ , vektory jsou proto lineárně nezávislé.

(b) Opět sestavíme soustavu rovnic

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right),$$

kterou převedeme na odstupňovaný tvar

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Soustava má tedy i netriviální řešení a vektory jsou proto lineárně závislé. Pro úplnost doplníme, že množina řešení soustavy je  $\{(-x_3, 2x_3, x_3)^T; x_3 \in \mathbb{R}\}$ . Tedy například pro  $x_3 = 1$  máme

$$-1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

**Cv. 8.3** Necht'  $u, v, w$  jsou lineárně nezávislé vektory z vektorového prostoru  $V$  nad  $\mathbb{R}$ . Rozhodněte, zda-li jsou následující množiny lineárně nezávislé.

- (a)  $\{u, v, o\}$ ,
- (b)  $\{w, v, u\}$ ,
- (c)  $\{u, u + v, u + w\}$ ,
- (d)  $\{u - v, u - w, v - w\}$ .

**Řešení:**

- (a) Lineárně závislé, neboť

$$0 \cdot u + 0 \cdot v + 1 \cdot o = o.$$

- (b) Lineárně nezávislé, neboť jsou to ty samé vektory, jenom v jiném pořadí. Změnou pořadí se lineární (ne)závislost vektorů nemění (proč?).
- (c) Zde už to očividně není, tak postupujeme obdobně jako v předchozím cvičení 8.2. Hledáme koeficienty  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$  takové, aby

$$0 = \alpha_1 u + \alpha_2(u + v) + \alpha_3(u + w) = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)u + \alpha_2 v + \alpha_3 w.$$

Protože  $u, v, w$  jsou lineárně nezávislé, musí být  $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$ ,  $\alpha_2 = 0$  a  $\alpha_3 = 0$  a tedy i  $\alpha_1 = 0$ . Proto je množina vektorů  $\{u, u + v, u + w\}$  lineárně nezávislá.

- (d) Obdobně jako v předchozím případě hledáme  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$  takové, že

$$0 = \alpha_1(u - v) + \alpha_2(u - w) + \alpha_3(v - w) = (\alpha_1 + \alpha_2)u + (-\alpha_1 + \alpha_3)v + (-\alpha_2 - \alpha_3)w.$$

Z lineární nezávislosti  $u, v, w$  dostáváme soustavu

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 &= 0, \\ -\alpha_1 + \alpha_3 &= 0, \\ -\alpha_2 - \alpha_3 &= 0. \end{aligned}$$

Řešením této soustavy je množina  $\{(\alpha_3, -\alpha_3, \alpha_3)^T; \alpha_3 \in \mathbb{R}\}$ . Množina  $\{u - v, u - w, v - w\}$  je tedy lineárně závislá, např. pro  $\alpha_3 = 1$  máme

$$1 \cdot (u - v) - 1 \cdot (u - w) + 1 \cdot (v - w) = o.$$

**Cv. 8.4** Necht'  $V$  je vektorový prostor nad tělesem  $\mathbb{T}$  a mějme dvě množiny vektorů  $X \subseteq Y \subseteq V$ . Rozhodněte, která z následujících tvrzení jsou pravdivá:

- (a) Je-li  $X$  nezávislá, pak je  $Y$  závislá.
- (b) Je-li  $X$  nezávislá, pak je  $Y$  nezávislá.
- (c) Je-li  $X$  závislá, pak je  $Y$  závislá.
- (d) Je-li  $Y$  nezávislá, pak je  $X$  nezávislá.
- (e) Je-li  $Y$  závislá, pak je  $X$  závislá.

**Řešení:**

Obecně dle definice se dá odvodit, že nezávislost se přenáší „dolů“ a závislost „nahoru“. Konkrétně:

- (a) Neplatí:  $X = \{(1, 0)^T\}$  a  $Y = \{(1, 0)^T, (0, 1)^T\}$  jsou obě nezávislé v  $\mathbb{R}^2$ .
- (b) Neplatí:  $X = \{(1, 0)^T\}$  je nezávislá, ale  $Y = \{(1, 0)^T, (2, 0)^T\}$  je už závislá v  $\mathbb{R}^2$ .
- (c) Platí. Mějme  $X = \{v_1, \dots, v_\ell\}$  a  $Y = \{v_1, \dots, v_\ell, w_1, \dots, w_k\}$ . Podle předpokladu je množina  $X$  závislá, tedy existují  $\alpha_1, \dots, \alpha_\ell \in \mathbb{T}$  takové, že  $(\alpha_1, \dots, \alpha_\ell) \neq (0, \dots, 0)$  a

$$\sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i x_i = 0.$$

Vezměme  $\beta_1, \dots, \beta_k = (0, \dots, 0)$ . Pak stále platí, že  $(\alpha_1, \dots, \alpha_\ell, \beta_1, \dots, \beta_k) \neq (0, \dots, 0)$  a

$$\sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i v_i + \sum_{j=1}^k \beta_j w_j = 0$$

je netriviální lineární kombinace vektorů z  $Y$ , která se rovná 0. Množina  $Y$  je tedy také lineární závislá.

- (d) Platí. Jde o obměnu bodu (c).
- (e) Neplatí:  $Y = \{(1, 0)^T, (2, 0)^T\}$  je závislá, ale  $X = \{(1, 0)^T\}$  je nezávislá v  $\mathbb{R}^2$ .

**Cv. 8.5** Rozhodněte, zda vektory  $(0, 1, 1, 1)^T$ ,  $(1, 0, 1, 1)^T$ ,  $(1, 1, 0, 1)^T$ ,  $(1, 1, 1, 0)^T$  jsou lineárně závislé v  $\mathbb{R}^4$  resp. v  $\mathbb{Z}_3^4$ .

**Řešení:**

Úlohu řešíme stejně jako ve cvičení 8.2, jen jednou počítáme nad tělesem  $\mathbb{R}$  a podruhé nad  $\mathbb{Z}_3$ . Zjistíme, že nad  $\mathbb{R}$  jsou vektory lineárně nezávislé. Nad  $\mathbb{Z}_3$  jsou ale lineárně závislé, například

$$1 \cdot (0, 1, 1, 1)^T + 1 \cdot (1, 0, 1, 1)^T + 1 \cdot (1, 1, 0, 1)^T + 1 \cdot (1, 1, 1, 0)^T = o.$$

Vidíme tedy, že lineární závislost/nezávislost závisí na volbě tělesa vektorového prostoru.

**Cv. 8.6** Buďte  $U, V$  podprostory prostoru  $W$ . Dokažte, že  $U \cap V = \{o\}$  právě tehdy, když každý vektor  $x \in U + V$  se dá jednoznačně zapsat jako  $x = u + v$ , kde  $u \in U$ ,  $v \in V$ .

**Řešení:**

Ekvivalenci dokážeme tak, že ukážeme zvlášť obě implikace.

„ $\Rightarrow$ “ Z definice spojení prostorů se každý vektor  $x \in U + V$  dá zapsat jako  $x = u + v$ , kde  $u \in U$ ,  $v \in V$ . Musíme tedy ukázat jednoznačnost tohoto vyjádření. Pro spor mějme dvě vyjádření vektoru  $x$ ,

$$u_1 + v_1 = x = u_2 + v_2$$

pro  $u_1, u_2 \in U$  a  $v_1, v_2 \in V$ . Rovnost upravíme na

$$u_1 - u_2 = v_2 - v_1.$$

Vektor  $u_1 - u_2$  leží v  $U$  a vektor  $v_2 - v_1$  leží ve  $V$ . Z předpokladu je  $U \cap V = \{0\}$ , čili  $u_1 - u_2 = v_2 - v_1 = 0$ . Z toho ale vyplývá, že  $u_1 = u_2$  a  $v_1 = v_2$  a vyjádření  $x$  je tedy jednoznačné. Spor.

„ $\Leftarrow$ “ Opět postupujeme sporem. Předpokládejme, že existuje nenulový vektor  $w \in U \cap V$ . Pak tento vektor můžeme vyjádřit dvěma různými způsoby (první sčítanec je z  $U$ , druhý sčítanec je z  $V$ ):

$$w = w + o = o + w.$$

**Cv. 8.7** Určete, zda následující množiny vektorů jsou lineárně nezávislé v prostoru reálných funkcí  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  (nad tělesem  $\mathbb{R}$ ).

- (a)  $\{2x - 1, x - 2, 3x\}$ .
- (b)  $\{x^2 + 2x + 3, x + 1, x - 1\}$ .
- (c)  $\{\sin x, \cos x\}$ .

**Řešení:**

- (a) Označme  $f(x) = 2x - 1$ ,  $g(x) = x - 2$  a  $h(x) = 3x$ . Pak hledáme  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$  takové, že  $\alpha_1 \cdot f(x) + \alpha_2 \cdot g(x) + \alpha_3 \cdot h(x) = 0$  pro všechna  $x \in \mathbb{R}$ . Dostáváme

$$\alpha_1 \cdot (2x - 1) + \alpha_2 \cdot (x - 2) + \alpha_3 \cdot 3x = (2\alpha_1 + \alpha_2 + 3\alpha_3) \cdot x + (-\alpha_1 - 2\alpha_2) = 0.$$

Rovnost je splněna pro všechna  $x$  právě tehdy, když je nulový absolutní člen i koeficient u proměnné  $x$ :

$$\begin{aligned} 2\alpha_1 + \alpha_2 + 3\alpha_3 &= 0, \\ -\alpha_1 - 2\alpha_2 &= 0. \end{aligned}$$

Množina řešení této soustavy je  $\{(-2x_3, x_3, x_3)^T; x_3 \in \mathbb{R}\}$ . Množina  $\{2x - 1, x - 2, 3x\}$  je tedy lineárně závislá, např. pro  $x_3 = 1$  máme

$$-2 \cdot (2x - 1) + 1 \cdot (x - 2) + 1 \cdot (3x) = 0.$$

(b) Opět hledáme  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$  takové, že

$$\alpha_1 \cdot (x^2 + 2x + 3) + \alpha_2 \cdot (x + 1) + \alpha_3 \cdot (x - 1) = 0,$$

neboli

$$\alpha_1 \cdot x^2 + (2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) \cdot x + (3\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3) = 0.$$

Aby byl polynom nulový pro všechna  $x \in \mathbb{R}$ , musí být všechny koeficienty polynomu nulové. Z toho dostaneme homogenní soustavu

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right).$$

Tato soustava má jediné řešení  $(0, 0, 0)^T$ , polynomy jsou tedy lineárně nezávislé.

(c) Hledáme řešení rovnice

$$\alpha_1 \sin x + \alpha_2 \cos x = 0,$$

čili taková  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ , aby rovnice byla splněna pro každé  $x \in \mathbb{R}$ . Protože nemůžeme sestavit soustavu rovnic podobně jako v předchozích podúlohách, snažíme se nalézt takové  $x \in \mathbb{R}$ , pro které vynutíme z rovnosti konkrétní hodnoty  $\alpha_1, \alpha_2$ . Pokud dosadíme  $x = 0$ , dostaneme  $\alpha_2 = 0$ , protože  $\sin 0 = 0$  a  $\cos 0 = 1$ . Pokud dosadíme  $x = \frac{\pi}{2}$ , pak nutně  $\alpha_1 = 0$ , protože  $\sin \frac{\pi}{2} = 1$  a  $\cos \frac{\pi}{2} = 0$ . Aby byla rovnice splněna, nutně musí  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ . Zároveň vidíme, že  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$  splňují tuto rovnici. Funkce jsou tedy lineárně nezávislé.

**Cv. 8.8** Najděte čtyři lineárně závislé vektory z  $\mathbb{R}^4$  tak, aby:

- (a) právě jeden vektor byl lineárně závislý na ostatních,
- (b) právě dva vektory byly lineárně závislé na ostatních třech,
- (c) právě tři vektory byly lineárně závislé na ostatních třech,
- (d) každý z nich byl lineárně závislý na ostatních třech,

**Řešení:**

- (a) Například  $e_1, e_2, e_3, o$  (ten poslední).
- (b) Například  $e_1, e_2, e_3, 2e_3$  (ty poslední dva).
- (c) Například  $e_1, e_2, e_3, e_2 + e_3$  (ty poslední tři).
- (d) Například  $e_1, e_2, e_3, e_1 + e_2 + e_3$ .