9. Báze a dimenze

Báze a souřadnice

Cv. 9.1 Najděte bázi a určete dimenzi následujících vektorových prostorů:

(a) $\mathbb{R}^2$ nad $\mathbb{R}$,

(b) $\mathbb{C}^2$ nad $\mathbb{C}$,

(c) $\mathbb{C}^2$ nad $\mathbb{R}$,

(d) $\mathcal{P}^2$,

(e) $\mathbb{R}^{2\times 2}$ nad $\mathbb{R}$,

(f) prostor symetrických matic v $\mathbb{R}^{2\times 2}$ nad $\mathbb{R}$.

Řešení:

(a) Bázi tvoří například e_1, e_2 či jakékoli dva lineárně nezávislé vektory. Dimenze je tudíž 2.

(b) Bázi tvoří například e_1, e_2 či jakékoli dva lineárně nezávislé vektory. Dimenze je tudíž 2.

Tato vlastnost platí obecně. Je-li $\mathbb{T}$ těleso, pak vektorový prostor $\mathbb{T}^2$ nad $\mathbb{T}$ má dimenzi 2 a jeho bází je například kanonická báze e_1, e_2. Důkaz: vektory e_1, e_2 jsou zřejmě lineárně nezávislé a každý vektor $v = (v_1, v_2)^T \in \mathbb{T}$ lze napsat $v = v_1(1,0)^T + v_2(0,1)^T = v_1e_1 + v_2e_2$.

(c) Bázi tvoří například $e_1, e_2, (i,0)^T, (0,i)^T$. Dimenze je tudíž 4.

Důkaz. Nejprve ukážeme, že to jsou generátory. Každý vektor $v \in \mathbb{C}^2$ je tvaru $v = (a_1 + b_1i, a_2 + b_2i)^T$, kde $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$. Můžeme tento vektor tedy vyjádřit

$$v = a_1(1,0)^T + b_1(i,0)^T + a_2(0,1)^T + b_2(0,i)^T.$$

Lineární nezávislost. Uvažujme lineární kombinaci vektorů (s reálnými koeficienty!)

$$a_1(1,0)^T + b_1(i,0)^T + a_2(0,1)^T + b_2(0,i)^T = (0,0)^T, \quad a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}.$$

Rovnice lze ekvivalentně psát $(a_1 + b_1i, a_2 + b_2i)^T = (0,0)^T$ a je splněna právě tehdy, když $a_1 = b_1 = a_2 = b_2 = 0$.

(d) Bázi tvoří například $1, x, x^2$. Dimenze je tudíž 3.

(e) Bázi tvoří například $\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix}0&1\\0&0\end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix}0&0\\1&0\end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)$. Dimenze je tudíž 4.

(f) Bázi tvoří například $\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)$. Dimenze je tudíž 3.

Cv. 9.2 Zjistěte, zda $(-1,5,3)^T \in \operatorname{span}\{(1,2,2)^T, (4,1,3)^T\}$.

Pokud ano, tak určete souřadnice vektoru vzhledem k dané bázi.

Řešení:

Chceme vyjádřit vektor $v = (-1, 5, 3)^T$ jako lineární kombinaci vektorů $(1, 2, 2)^T$, $(4, 1, 3)^T$, čili

$$(-1, 5, 3)^T = \alpha(1, 2, 2)^T + \beta(4, 1, 3)^T.$$

To je vlastně soustava tří rovnic o dvou neznámých (α, β), kterou můžeme zapsat maticově

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 3 \end{array}\right).$$

Vyřešením soustavy zjistíme, že existuje jediné řešení $\alpha = 3$, $\beta = -1$. To jsou i hledané souřadnice $[v]_B = (3, -1)^T$.

Cv. 9.3 V prostoru $\mathcal{P}^2$ najděte souřadnice vektoru $x^2 + 2$ vzhledem k bázi $x^2 + 1$, $x - 2$, $2x^2 + x - 1$.

Řešení:
Postupujeme analogicky, jako v předchozí úloze. Chceme vyjádřit vektor $p(x) = x^2 + 2$ jako lineární kombinaci vektorů $x^2 + 1$, $x - 2$, $2x^2 + x - 1$, čili

$$x^2 + 2 = \alpha(x^2 + 1) + \beta(x - 2) + \gamma(2x^2 + x - 1).$$

Po úpravě

$$x^2 + 2 = (\alpha + 2\gamma)x^2 + (\beta + \gamma)x + (\alpha - 2\beta - \gamma).$$

To nám dá soustavu tří rovnic o třech neznámých, jejíž maticové vyjádření je

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 2 \end{array}\right).$$

Matice soustavy je regulární, a tudíž soustava má jediné řešení, a to $\alpha = 3$, $\beta = 1$, $\gamma = -1$. Hledané souřadnice jsou $[p(x)]_B = (3, 1, -1)^T$.

Cv. 9.4 Souřadnice vektoru v vzhledem k bázi $B = \{z_1, z_2, z_3, z_4\}$ jsou $[v]_B = (a_1, a_2, a_3, a_4)^T$. Určete souřadnice vektoru v vzhledem k bázi B', pokud

(a) $B' = \{z_4, z_3, z_2, z_1\}$,

(b) $B' = \{z_1 + z_4, z_2, z_3, z_4\}$,

(c) $B' = \{z_1 + z_4, z_2 + z_3, z_4, z_2\}$.

Řešení:
Souřadnice vektoru v vzhledem k bázi B' můžeme určit standardním způsobem, ale vzhledem k tomu, jak báze B' vypadá, tak souřadnice odvodíme přímo. K tomu nám pomůže fakt, že ze zadání víme $v = a_1z_1 + a_2z_2 + a_3z_3 + a_4z_4 = \sum_{i=1}^4 a_iz_i$.

(a) Protože můžeme psát $v = a_4z_4 + a_3z_3 + a_2z_2 + a_1z_1$, tak hledané souřadnice jsou$[v]_{B'} = (a_4, a_3, a_2, a_1)^T$.

(b) Chceme vyjádřit vektor jako

$$v = ?\,(z_1 + z_4) +\ ?\,z_2 +\ ?\,z_3 +\ ?\,z_4,$$

přičemž víme

$$v = a_1z_1 + a_2z_2 + a_3z_3 + a_4z_4.$$

Zde se nabízí vhodně přičíst a odečíst hodnotu a_1z_4 a vyjádřit vektor jako

$$v = a_1(z_1 + z_4) + a_2z_2 + a_3z_3 + (a_4 - a_1)z_4,$$

z čehož $[v]_{B'} = (a_1, a_2, a_3, a_4 - a_1)^T$.

(c) Analogickou úvahou vyjádříme vektor jako

$$\begin{aligned} v &= a_1(z_1 + z_4) + a_2z_2 + a_3z_3 + (a_4 - a_1)z_4 \\ &= a_1(z_1 + z_4) + a_3z_3 + (a_4 - a_1)z_4 + a_2z_2 \\ &= a_1(z_1 + z_4) + a_3(z_2 + z_3) + (a_4 - a_1)z_4 + (a_2 - a_3)z_2, \end{aligned}$$

z čehož $[v]_{B'} = (a_1, a_3, a_4 - a_1, a_2 - a_3)^T$.

Dimenze

Cv. 9.5 Najděte všechny podprostory vektorového prostoru $\mathbb{R}^2$ nad $\mathbb{R}$.

Řešení:

Budeme postupovat výčtem možných hodnot pro dimenzi podprostoru. Dimenzi 0 má pouze podprostor $\{o\}$, dimenzi 1 mají přímky procházející počátkem (těch je nekonečně mnoho), a dimenzi 2 má jen celý prostor $\mathbb{R}^2$.

Cv. 9.6 Určete počet podprostorů $\mathbb{Z}_p^2$ nad $\mathbb{Z}_p$.

Řešení:

Opět rozdělíme podprostory podle jejich dimenze. Dimenzi 0 má pouze podprostor $\{o\}$. Dimenzi 2 má jen celý prostor $\mathbb{Z}_p^2$. Dimenzi 1 mají přímky procházející počátkem. Přímka má normovaný směr buď $(0, 1)$ nebo $(1, a)$, $a \in \mathbb{Z}_p$. Celkem dostáváme, že počet podprostorů je $p + 3$.

Cv. 9.7 Buďte U, V podprostory vektorového prostoru W a nechť $\dim U = 7$, $\dim V = 8$, $\dim W = 13$.

(a) Odhadněte zdola a shora hodnotu $\dim(U+V)$ a najděte konkrétní příklady, kdy se obě meze nabydou.

(b) Odhadněte zdola a shora hodnotu $\dim(U \cap V)$ a opět ukažte, že je odhad těsný.

Řešení:

(a) Protože oba prostory U, V jsou podprostory prostoru $U + V$, musí platit $\dim U \leq \dim(U + V)$ a $\dim V \leq \dim(U + V)$. To nám dává první odhad zdola $\dim(U+V) \geq 8$. Zároveň není těžké nahlédnout, že je odhad těsný, to znamená, že se někdy může nabýt jako rovnost. Uvažujme například prostor

$W = \mathbb{R}^{13}$ a jeho podprostory $U = \mathrm{span}\{e_1, \ldots, e_7\}$, $V = \mathrm{span}\{e_1, \ldots, e_8\}$. Potom $U + V = V$, čili $\dim(U + V) = \dim V = 8$.

Pro odhad shora stačí využít toho, že oba prostory U, V jsou podprostory prostoru W. Proto musí platit $\dim(U + V) \leq \dim W$. To vede na odhad $\dim(U+V) \leq 13$. I tento odhad je těsný. Uvažujme opět prostor $W = \mathbb{R}^{13}$, ale tentokrát s podprostory $U = \mathrm{span}\{e_1, \ldots, e_7\}$, $V = \mathrm{span}\{e_6, \ldots, e_{13}\}$. V tomto případě $U + V = W$, a tak $\dim(U + V) = \dim W = 13$.

(b) Zde využijeme větu o dimenzi spojení a průniku podprostorů, která říká

$$\dim U + \dim V = \dim(U + V) + \dim(U \cap V).$$

V našem případě má věta tvar

$$\dim(U \cap V) = \dim U + \dim V - \dim(U + V) = 15 - \dim(U + V).$$

Pro odhady zdola a shora využijme předchozí odhady na $\dim(U + V)$ a dostaneme

$$\dim(U \cap V) = 15 - \dim(U + V) \leq 15 - 8 = 7$$

a

$$\dim(U \cap V) = 15 - \dim(U + V) \leq 15 - 13 = 2.$$

Odhady jsou opět těsné, o čemž nás přesvědčí stejné příklady jako v předchozím bodu.

Direktní součet

Cv. 9.8 Nechť U, V jsou podprostory vektorového prstoru W. Dokažte, že pokud $U \cap V = \{o\}$, pak každý vektor $w \in U + V$ lze zapsat jediným způsobem ve tvaru $w = u + v$, kde $u \in U$ a $v \in V$.

Řešení:

Budeme postupovat sporem. Předpokládejme pro spor, že existují dvě různá vyjádření součtu $w = u + v = u' + v'$, kde $u, u' \in U$ a $v, v' \in V$. Pak ale vektor $z := u - u' = v - v'$ je nenulový a nachází se v průniku $U \cap V$, což je spor s předpokladem.

Cv. 9.9 Buď W direktním součtem svých podprostorů U, V. Dokažte: Je-li $u_1, \ldots, u_m$ báze U a $v_1, \ldots, v_n$ báze V, pak $u_1, \ldots, u_m, v_1, \ldots, v_n$ je báze W.

Řešení:

Protože vektory $u_1, \ldots, u_m$ generují podprostor U a vektory $v_1, \ldots, v_n$ generují podprostor V, tak vektory $u_1, \ldots, u_m, v_1, \ldots, v_n$ musí generovat prostor $W = U + W$.

Z předpokladu (a definice direktního součtu podprostorů) je $U \cap V = \{o\}$, čili $\dim(U \cap V) = 0$. Podle věty o dimenzi spojení a průniku podprostorů máme

$$m + n = \dim U + \dim V = \dim(U + V) + \dim(U \cap V) = \dim(U + V) = \dim W.$$

Prostor W má tedy dimenzi $m+n$. Ale zároveň víme, že množina jeho generátorů $u_1, \ldots, u_m, v_1, \ldots, v_n$ má velikost také $m + n$. Proto musí tyto generátory tvořit bázi prostoru W.