14. Afinní podprostory

Afinní podprostory, afinní nezávislost

Cv. 14.1 Ukažte, že množina řešení (řešitelné) soustavy $Ax = b$ je afinní množina, a to tak, že je uzavřená na afinní kombinace.

Cv. 14.2 Rozhodněte, zda vektory

$$x_0 = (1, 2, 3)^T,\ x_1 = (2, 3, 1)^T,\ x_2 = (1, 3, 2)^T,\ x_3 = (2, 1, 3)^T$$

jsou afinně nezávislé.

Cv. 14.3 Rozhodněte, zda vektory

$$x_0 = (1, 0, 2)^T,\ x_1 = (2, 2, 1)^T,\ x_2 = (2, 1, 3)^T \text{ a } \ x_3 = (3, 3, 2)^T$$

leží v jedné rovině.

Cv. 14.4 Dokažte, že vektory $x_0, x_1, \dots, x_n$ jsou afinně nezávislé právě tehdy, když vektory $y_0 = (x_0^T, 1)^T$, $y_1 = (x_1^T, 1)^T, \dots, y_n = (x_n^T, 1)^T$ jsou lineárně nezávislé.

Cv. 14.5 Rozhodněte, zda $M = N$ pro

(a) $M = \operatorname{span}\{(1, 2)^T\} + (1, -1)^T$,
$N = \operatorname{span}\{(2, 4)^T\} + (2, 3)^T$,

(b) $M = \operatorname{span}\{(1, 2, 1)^T, (2, 1, 0)^T\} + (1, 0, 0)^T$,
$N = \operatorname{span}\{(0, 3, 2)^T, (3, 0, -1)^T\} + (2, -1, -1)^T$.

Afinní zobrazení

Cv. 14.6 Uvažujme dvě afinní zobrazení f, g v rovině, přičemž f představuje překlopení podle přímky $p = \{(x, 10);\ x \in \mathbb{R}\}$ a g představuje překloplení podle přímky $q = \{(2, y);\ y \in \mathbb{R}\}$.

(a) Najděte maticový předpis zobrazení f,

(b) najděte maticový předpis zobrazení g,

(c) z předchozích předpisů odvoďte maticový předpis zobrazení $f \circ g$.

Cv. 14.7 Dokažte:

(a) Obraz afinního podprostoru při afinním zobrazení je afinní podprostor.

(b) Složením dvou afinních zobrazení dostaneme opět afinní zobrazení.

(c) Buď $f\colon U \to V$ lineární zobrazení a $v \in V$. Pak vzor vektoru v

$$f^{-1}(v) \coloneqq \{u \in U\ ;\ f(u) = v\}$$

je afinní podprostor v U.

Cv. 14.8 Najděte úplný vzor $f^{-1}(I_2)$ pro lineární zobrazení $f\colon \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ zadané $f(A) = \frac{1}{2}(A + A^T)$.