

## 5. Grupy a tělesa

### Grupy

**Cv. 5.1** Zjistěte, zda je (Abelovou) grupou:

- (a)  $(\mathbb{Q}, +)$ ,
- (b)  $(\mathbb{Q}, -)$ ,
- (c)  $(\mathbb{Q}, \cdot)$ ,
- (d)  $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \circ)$ , kde  $a \circ b = |ab|$  pro všechna  $a, b \in \mathbb{Q}$ ,
- (e)  $(\mathbb{Q}, \circ)$ , kde  $a \circ b = \frac{a+b}{2}$  pro všechna  $a, b \in \mathbb{Q}$ ,
- (f)  $(\mathbb{Q}, \circ)$ , kde  $a \circ b = a + b + 3$  pro všechna  $a, b \in \mathbb{Q}$ ,
- (g)  $(\mathcal{F}, +)$ , tj. množina  $\mathcal{F}$  všech reálných funkcí jedné proměnné s operací sčítání funkcí,
- (h) množina rotací v  $\mathbb{R}^2$  kolem počátku s operací skládání zobrazení,
- (i) množina posunutí v  $\mathbb{R}^2$  s operací skládání zobrazení.

**Cv. 5.2** Vyplňte tabulku pro binární operaci  $\circ$  na  $G$  tak aby  $(G, \circ)$  byla grupou s neutrálním prvkem 0. Výsledek zdůvodněte.

(a) 

$\circ$	0	1
0		
1		

(b) 

$\circ$	0	1	2
0			
1			
2			

(c) 

$\circ$	0
0	

(d) 

$\circ$	0	1	2	3
0				
1		0		
2				
3				

**Cv. 5.3** Rozhodněte a zdůvodněte, zda je Abelovou grupou množina

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; z \in \mathbb{Z} \right\} \text{ s maticovým součinem.}$$

**Cv. 5.4** Mějme grupu  $(G, \circ)$  s neutrálním prvkem  $e$  a inverze k prvku  $a$  nechť je  $a^{-1}$ . Proved'te:

- (a) najděte  $e^{-1}$ ,
- (b) upravte  $(a \circ b)^{-1}$ .

**Cv. 5.5** Najděte různé příklady podgrup grupy matic  $(\mathbb{R}^{n \times n}, +)$ .

**Konečná tělesa  $\mathbb{Z}_p$** 

**Cv. 5.6** Vyjádřete jako prvky daného tělesa výrazy:

(a)  $((2^{-1} + 1)4)^{-1}$  a  $4/3$  v tělese  $\mathbb{Z}_5$ ,

(b)  $6 + 7$ ,  $-7$ ,  $6 \cdot 7$ ,  $7^{-1}$  a  $6/7$  v tělese  $\mathbb{Z}_{11}$ .

**Cv. 5.7** Nad  $\mathbb{Z}_5$  najděte množinu všech řešení soustavy rovnic

$$3x + 2y + z = 1,$$

$$4x + y + 3z = 3$$

a spočítejte její mohutnost.

**Cv. 5.8** V  $\mathbb{Z}_7$  spočítejte mocninu matice  $A^{100}$  pro matici  $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ .

**Cv. 5.9** Spočítejte  $20^{3332}$  v tělese  $\mathbb{Z}_{31}$ .