

7. Vektorové prostory a podprostory, lineární obal

Vektorové prostory a podprostory

Cv. 7.1 Rozhodněte, zda tvoří vektorový prostor:

- (a) \mathbb{Z}_p^n nad \mathbb{Z}_p ,
- (b) \mathbb{R}^n nad \mathbb{Q} ,
- (c) \mathbb{Q}^n nad \mathbb{R} ,
- (d) \mathbb{R}^n nad \mathbb{R} s operacemi $x \oplus y = x + y$, $\alpha \odot x = -\alpha \cdot x$,
- (e) \mathbb{R}^n nad \mathbb{R} s operacemi $x \oplus y = x + y$, $\alpha \odot x = |\alpha| \cdot x$,
- (f) $U \times V$ nad \mathbb{T} , kde U, V jsou vektorové prostory nad \mathbb{T} , sčítání a násobení je definováno standardně po složkách.
- (g) množina všech zobrazení $f: M \rightarrow V$ nad tělesem \mathbb{T} , kde M je daná množina a V vektorový prostor nad \mathbb{T} .

Cv. 7.2 Najděte netriviální podmnožinu \mathbb{R}^2 , která je:

- (a) uzavřená na sčítání a odčítání, ale ne na násobky,
- (b) uzavřená na násobky, ale ne na sčítání.

Cv. 7.3 Rozhodněte, zda následující množiny vektorů tvoří podprostor \mathbb{R}^2 :

- (a) $\{(s, 5s)^T; s \in \mathbb{R}\}$,
- (b) $\{(s + t, 1)^T; s, t \in \mathbb{R}\}$,
- (c) $\{(s, s^2)^T; s \in \mathbb{R}\}$,
- (d) $\{(s - t, 2t)^T; s, t \in \mathbb{R}\}$.

Cv. 7.4 Bud' $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Dokažte, že $\{x \in \mathbb{R}^n; Ax = 0\}$ tvoří vektorový podprostor \mathbb{R}^n .

Cv. 7.5 Nalezněte vlastní příklady podprostorů prostoru matic $\mathbb{R}^{n \times n}$ nad \mathbb{R} .

Cv. 7.6 Rozhodněte, zda následující tvoří podprostor prostoru reálných posloupností $\mathbb{R}^\infty = \{(x_1, x_2, \dots); x_i \in \mathbb{R}, i \in \mathbb{N}\}$:

- (a) posloupnosti s nekonečně mnoha nulami,
- (b) posloupnosti s konečně mnoha nenulami,
- (c) monotónní posloupnosti (neklesající a nerostoucí posloupnosti čísel),
- (d) fibonacciovské posloupnosti (splňující $x_{i+1} = x_i + x_{i-1}$, kde $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ jsou libovolné).

Lineární obal, lineární kombinace

Cv. 7.7 Buď V vektorový prostor a $M, N \subseteq V$ množiny vektorů. Rozhodněte, zda platí

- (a) $\text{span}(\text{span}(M)) = \text{span}(M)$,
- (b) $M \subseteq N \Rightarrow \text{span}(M) \subseteq \text{span}(N)$,
- (c) $M \subseteq N \Leftarrow \text{span}(M) \subseteq \text{span}(N)$,
- (d) $\text{span}(M \cap N) = \text{span}(M) \cap \text{span}(N)$,

Cv. 7.8 Rozhodněte, zda vektory $(1, 2)^T$ a $(3, 4)^T$ generují \mathbb{R}^2 .

Cv. 7.9 Rozhodněte, zda existuje lineární kombinace zadaných vektorů dávající vektor $x = (1, 2, 3)^T$ a pokud ano, tak ji najděte:

- (a) $(1, 1, 1)^T, (2, 1, 3)^T, (3, 1, 5)^T$
- (b) $(2, 1, 3)^T, (3, 1, 2)^T, (1, 1, 1)^T$.