

## 8. Lineární závislost a nezávislost

**Cv. 8.1** Diskutujte, kdy je systém jednoho resp. dvou resp. tří vektorů lineárně závislý.

**Cv. 8.2** Zjistěte zda jsou vektory z  $\mathbb{R}^3$  lineárně nezávislé:

(a)  $(2, 3, -5)^T, (1, -1, 1)^T, (3, 2, -2)^T$ .

(b)  $(2, 0, 3)^T, (1, -1, 1)^T, (0, 2, 1)^T$ .

**Cv. 8.3** Nechtě  $u, v, w$  jsou lineárně nezávislé vektory z vektorového prostoru  $V$  nad  $\mathbb{R}$ . Rozhodněte, zda-li jsou následující množiny lineárně nezávislé.

(a)  $\{u, v, o\}$ ,

(b)  $\{w, v, u\}$ ,

(c)  $\{u, u + v, u + w\}$ ,

(d)  $\{u - v, u - w, v - w\}$ .

**Cv. 8.4** Nechtě  $V$  je vektorový prostor nad tělesem  $\mathbb{T}$  a mějme dvě množiny vektorů  $X \subseteq Y \subseteq V$ . Rozhodněte, která z následujících tvrzení jsou pravdivá:

(a) Je-li  $X$  nezávislá, pak je  $Y$  závislá.

(b) Je-li  $X$  nezávislá, pak je  $Y$  nezávislá.

(c) Je-li  $X$  závislá, pak je  $Y$  závislá.

(d) Je-li  $Y$  nezávislá, pak je  $X$  nezávislá.

(e) Je-li  $Y$  závislá, pak je  $X$  závislá.

**Cv. 8.5** Rozhodněte, zda vektory  $(0, 1, 1, 1)^T, (1, 0, 1, 1)^T, (1, 1, 0, 1)^T, (1, 1, 1, 0)^T$  jsou lineárně závislé v  $\mathbb{R}^4$  resp. v  $\mathbb{Z}_3^4$ .

**Cv. 8.6** Buďte  $U, V$  podprostory prostoru  $W$ . Dokažte, že  $U \cap V = \{o\}$  právě tehdy, když každý vektor  $x \in U + V$  se dá jednoznačně zapsat jako  $x = u + v$ , kde  $u \in U, v \in V$ .

**Cv. 8.7** Určete, zda následující množiny vektorů jsou lineárně nezávislé v prostoru reálných funkcí  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  (nad tělesem  $\mathbb{R}$ ).

(a)  $\{2x - 1, x - 2, 3x\}$ .

(b)  $\{x^2 + 2x + 3, x + 1, x - 1\}$ .

(c)  $\{\sin x, \cos x\}$ .

**Cv. 8.8** Najděte čtyři lineárně závislé vektory z  $\mathbb{R}^4$  tak, aby:

(a) právě jeden vektor byl lineárně závislý na ostatních,

(b) právě dva vektory byly lineárně závislé na ostatních třech,

(c) právě tři vektory byly lineárně závislé na ostatních třech,

(d) každý z nich byl lineárně závislý na ostatních třech,