

9. Báze a dimenze

Báze a souřadnice

Cv. 9.1 Najděte bázi a určete dimenzi následujících vektorových prostorů:

- (a) \mathbb{R}^2 nad \mathbb{R} ,
- (b) \mathbb{C}^2 nad \mathbb{C} ,
- (c) \mathbb{C}^2 nad \mathbb{R} ,
- (d) \mathcal{P}^2 ,
- (e) $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ nad \mathbb{R} ,
- (f) prostor symetrických matic v $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ nad \mathbb{R} .

Cv. 9.2 Zjistěte, zda $(-1, 5, 3)^T \in \text{span}\{(1, 2, 2)^T, (4, 1, 3)^T\}$.

Pokud ano, tak určete souřadnice vektoru vzhledem k dané bázi.

Cv. 9.3 V prostoru \mathcal{P}^2 najděte souřadnice vektoru $x^2 + 2$ vzhledem k bázi $x^2 + 1, x - 2, 2x^2 + x - 1$.

Cv. 9.4 Souřadnice vektoru v vzhledem k bázi $B = \{z_1, z_2, z_3, z_4\}$ jsou $[v]_B = (a_1, a_2, a_3, a_4)^T$. Určete souřadnice vektoru v vzhledem k bázi B' , pokud

- (a) $B' = \{z_4, z_3, z_2, z_1\}$,
- (b) $B' = \{z_1 + z_4, z_2, z_3, z_4\}$,
- (c) $B' = \{z_1 + z_4, z_2 + z_3, z_4, z_2\}$.

Dimenze

Cv. 9.5 Najděte všechny podprostory vektorového prostoru \mathbb{R}^2 nad \mathbb{R} .

Cv. 9.6 Určete počet podprostorů \mathbb{Z}_p^2 nad \mathbb{Z}_p .

Cv. 9.7 Buďte U, V podprostory vektorového prostoru W a necht' $\dim U = 7, \dim V = 8, \dim W = 13$.

- (a) Odhadněte zdola a shora hodnotu $\dim(U + V)$ a najděte konkrétní příklady, kdy se obě meze nabydou.
- (b) Odhadněte zdola a shora hodnotu $\dim(U \cap V)$ a opět ukažte, že je odhad těsný.

Direktní součet

Cv. 9.8 Necht' U, V jsou podprostory vektorového prostoru W . Dokažte, že pokud $U \cap V = \{o\}$, pak každý vektor $w \in U + V$ lze zapsat jediným způsobem ve tvaru $w = u + v$, kde $u \in U$ a $v \in V$.

Cv. 9.9 Buď W direktním součtem svých podprostorů U, V . Dokažte: Je-li u_1, \dots, u_m báze U a v_1, \dots, v_n báze V , pak $u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_n$ je báze W .