Vektorové prostory, lineární kombinace

Úkol 5.1. Buď M libovolná množina. Definujme součet dvou (pod)množin $A, B \subseteq M$ jako jejich symetrickou diferenci, t.j.

$$A \oplus B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Dokažte, že množina všech podmnožin M tvoří s operací $\oplus$ (a vhodně definovanou operací násobení) vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{Z}_2$. [6 b]

Úkol 5.2. Buď $M = \{a, b, c, d, e\}$ a uvažujme vektorový prostor všech podmnožin množiny M nad tělesem $\mathbb{Z}_2$, kde sčítání množin je definováno jako symetrická diference.

V tomto vektorovém prostoru:

(a) určete vektor $-x$ pro vektor $x = \{a, b, c\}$,

(b) vyhodnoťte lineární kombinaci

$$u + v - w - z,$$

kde $u = \{a, d\}$, $v = \{b, e\}$, $w = \{c, e\}$, $z = \{a, b, c\}$,

(c) rozhodněte, zda vektor $\{a, b, c, d, e\}$ lze vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů u, v, w, z uvedených v části (b). [4 b]