

## Analytická geometrie a motivace k soustavám rovnic

**Cv. 1.1** Vyjmenujte co nejvíce způsobů, jakými lze zadat přímku a rovinu. Diskutuje předpoklady a omezení jednotlivých přístupů.

### Řešení:

Možností je celá řada. Pro vyjádření přímky v rovině např.

- *Bod a směrový vektor přímky.* Bod může být libovolný bod na přímce, směrový vektor je libovolný nenulový vektor.
- *Dva body na přímce.* Libovolné, ale různé, body na přímce.
- *Dvě rovnice.* Dvě rovnice musí popisovat různé roviny, to znamená, že jedna nesmí být násobkem druhé. Navíc jejich normály nesmí být nulové vektory, jinak by rovnice nepopisovala rovinu.

Při řešení soustav lineárních rovnic se nejčastěji setkáme s obecnou rovnicí a parametrickým popisem.

- **Přímka v rovině  $\mathbb{R}^2$** 
  - *Parametrický popis:*  $(x, y) = (x', y') + t(u, v)$ , kde  $t \in \mathbb{R}$  je parametr,  $(x', y')$  je bod ležící na přímce a  $(u, v) \neq (0, 0)$  je směrový vektor.
  - *Obecná rovnice:*  $ax + by + c = 0$ , kde  $(a, b) \neq (0, 0)$  je normálový vektor přímky (kolmý na směrový vektor).
- **Rovina v prostoru  $\mathbb{R}^3$** 
  - *Parametrický popis:*  $(x, y, z) = (x', y', z') + t(u_1, v_1, w_1) + s(u_2, v_2, w_2)$  s parametry  $s, t \in \mathbb{R}$ , bodem v rovině  $(x', y', z')$  a směrovými vektory  $(u_1, v_1, w_1), (u_2, v_2, w_2) \neq (0, 0, 0)$ , pro které navíc platí  $(u_1, v_1, w_1) \neq k \cdot (u_2, v_2, w_2)$  pro všechna  $k \in \mathbb{R}$ .
  - *Obecná rovnice:*  $ax + by + cz + d = 0$  s normálou  $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ .
- **Přímka v prostoru  $\mathbb{R}^3$** 
  - *Parametrický popis:*  $(x, y, z) = (x', y', z') + t(u, v, w)$  s parametrem  $t \in \mathbb{R}$ , bodem  $(x', y', z')$  a směrovým vektorem  $(u, v, w) \neq (0, 0, 0)$ .
  - *Soustava rovnic:*  $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$  a  $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ , s normálovými vektory  $(a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2) \neq (0, 0, 0)$ , pro které navíc platí  $(a_1, b_1, c_1) \neq k \cdot (a_2, b_2, c_2)$  pro všechna  $k \in \mathbb{R}$ .

**Cv. 1.2** Najděte rovnicové vyjádření roviny, která je popsána bodem  $[3, 2, 1]$  a směrovými vektory  $(1, 1, 1)$ ,  $(2, -1, 0)$ .

### Řešení:

Normálu získáme například vektorovým součinem směrových vektorů  $(1, 1, 1)$  a  $(2, -1, 0)$ . Pro  $u = (1, 1, 1)$  a  $v = (2, -1, 0)$  dostaneme vektorový součin jako  $u \times v = (u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1) = (1, 2, -3)$ . Rovnice má tudíž tvar  $x_1 + 2x_2 - 3x_3 = d$ . Absolutní člen  $d$  určíme ze znalosti bodu roviny, tedy  $d = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 2 - 3 \cdot 1 = 4$ . Rovnice tak je

$$x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 4.$$

Pokud se chceme vyhnout použití vektorového součinu (nebo jej neznáme), budeme uvažovat normálu v obecném tvaru  $(a, b, c)$  a rovnici tak ve tvaru  $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ . Protože rovina obsahuje bod  $[3, 2, 1]$ , dostáváme rovnici

$$3a + 2b + c = d.$$

Jelikož rovina má směrové vektory  $(1, 1, 1), (2, -1, 0)$ , které musí být kolmé na normálu (t.j. jejich skalární součin je 0), dostáváme další dvě rovnice

$$a + b + c = 0, \quad 2a - b = 0.$$

Celkem tak máme 3 rovnice o 4 neznámých. To není překvapivé, protože výsledná rovnice není jednoznačná – mohu uvažovat její libovolný násobek. Každopádně vyřešením soustavy dostaneme jako řešení  $a = t, b = 2t, c = -3t, d = 4t$ , kde  $t \in \mathbb{R}$  je libovolné. Zvolíme například  $t = 1$  (nebo jakékoli jiné nenulové  $t$ ) a máme opět jako řešení rovnici

$$x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 4.$$

Na závěr doporučujeme udělat zpětnou zkoušku dosazením bodu a směrových vektorů!

**Cv. 1.3** Najděte parametrické vyjádření roviny  $2x_1 + 3x_2 + x_3 = 4$ .

**Řešení:**

Jeden bod roviny najdeme tak, že zvolíme libovolně hodnotu dvou složek a dopočítáme tu zbylou. Například zvolme  $x_2 = x_3 = 0$  a z rovnice dostaneme  $x_1 = 2$ . Tudíž máme bod  $[2, 0, 0]$ .

Směrové vektory získáme jako dva různé vektory (jeden nesmí být násobkem druhého), kolmé na normálu  $(2, 3, 1)$ . Můžeme to snadno uhádnout a zvolit například  $(0, 1, -2)$  a  $(1, 0, -2)$ . Kdo to nevidí hned, uvědomí si, že směrový vektor  $(u, v, w)$  musí být kolmý na normálu, tj.

$$2u + 3v + w = 0.$$

Z této rovnice najdeme dvě různá řešení. Například dosadíme  $u = 0, v = 1$  a dopočítáme  $w = -3$ , a jako druhé řešení dosadíme  $u = 1, v = 0$  a dopočítáme  $w = -2$ . Opět musíme být trochu opatrní, aby směrové vektory neudávali stejný směr.

Alternativně můžeme vyjádřit jednu z proměnných pomocí zbylých, které použijeme jako parametry, např.

$$x_3 = 4 - 2x_1 - 3x_2.$$

Rozepsáním pak dostaneme parametrický popis s parametry  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ :

$$(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, 4 - 2x_1 - 3x_2) = (0, 0, 4) + (1, 0, -2)x_1 + (0, 1, -3)x_2,$$

tedy bod  $[0, 0, 4]$  a směrové vektory  $(1, 0, -2), (0, 1, -3)$ .

**Cv. 1.4** Určete parametrický popis přímky zadané dvěma rovnicemi:

$$x_1 + 3x_2 + x_3 = 2, \quad 2x_1 + 5x_2 + x_3 = 3.$$

**Řešení:**

V zásadě vyřešíme soustavu rovnic a vyjádříme řešení pomocí parametru  $t$ .

Například eliminací proměnné  $x_1$  dostaneme rovnici  $x_2 + x_3 = 1$ . Zvolíme  $t = x_3$  jako parametr a pomocí něj vyjádříme ostatní proměnné. Z rovnice  $x_2 + x_3 = 1$  odvodíme  $x_2 = 1 - x_3 = 1 - t$ . Z původní rovnice  $x_1 + 3x_2 + x_3 = 2$  vyjádříme  $x_1 = 2 - 3x_2 - x_3 = 2 - 3(1 - t) - t = -1 + 2t$ .

Výsledek:

$$(x_1, x_2, x_3) = (-1 + 2t, 1 - t, t) = (-1, 1, 0) + t(2, -1, 1).$$

To jest, přímka prochází bodem  $[-1, 1, 0]$  a má směrový vektor  $(2, -1, 1)$ .

**Cv. 1.5** Najděte dvě rovnice popisující přímku  $[3, 2, 1] + t(1, -1, 1)$ .

**Řešení:**

Každá rovnice musí vyhovovat bodu  $[3, 2, 1]$  a její normála musí být kolmá na směrový vektor  $(1, -1, 1)$ . Navíc dvě výsledné rovnice musí popisovat odlišné roviny, tedy nesmí být až na násobek stejné.

Zvolme normálu například  $(1, 1, 0)$ , ta je kolmá na směrový vektor. Normále odpovídá rovnice  $x_1 + x_2 = d$  a ze znalosti bodu  $[3, 2, 1]$  odvodíme  $d = 5$ . Nyní zvolme jinou normálu, například  $(0, 1, 1)$ , která je též kolmá na směrový vektor. Ta odpovídá rovnici  $x_2 + x_3 = d'$  a ze znalosti bodu  $[3, 2, 1]$  odvodíme  $d' = 3$ . Tudíž výsledkem jsou rovnice

$$x_1 + x_2 = 5, \quad x_2 + x_3 = 3.$$

Poznamenejme, že řešení není jednoznačné. V druhém kroku jsme mohli zvolit normálu  $(1, 0, -1)$ , která vede na rovnici  $x_1 - x_3 = 2$ . Tudíž rovnice  $x_1 + x_2 = 5$ ,  $x_1 - x_3 = 2$  dávají také správné řešení.

Dále ještě podotkněme, že dvě rovnice stačí. Pokud bychom k rovnicím  $x_1 + x_2 = 5$ ,  $x_2 + x_3 = 3$  přidali ještě rovnici  $x_1 - x_3 = 2$ , tak soustava  $x_1 + x_2 = 5$ ,  $x_2 + x_3 = 3$ ,  $x_1 - x_3 = 2$  sice stále popisuje zadanou přímku, ale třetí rovnice je redundantní. Vskutku, čtenář jistě snadno ověří, že je rozdílem první a druhé rovnice.

**Cv. 1.6** Určete všechny možné vzájemné polohy dvou přímek v prostoru  $\mathbb{R}^3$ . Dále, popište, jak lze dané polohy zjistit, pokud jsou obě přímky definovány parametricky nebo rovnicemi.

**Řešení:**

Možné polohy přímek:

- *Rovnoběžné.*

Parametricky: Směrový vektor jedné přímky je násobkem směrového vektoru druhé přímky, ale přímky nemají průsečík.

Rovnicově: Všechny normály jsou v jedné rovině, tj. každou normálu mohu vyjádřit jako součet násobků normál rovnic druhé přímky. Dále, žádný bod nevyhovuje všem rovnicím naráz.

- *Totožné.*

Parametricky: Směrový vektor jedné přímky je násobkem směrového vektoru druhé přímky a navíc přímky mají průsečík.

Rovnicově: Všechny normály jsou v jedné rovině, tj. každou normálu mohu vyjádřit jako součet násobků normál rovnic druhé přímky. Dále, aspoň jeden bod vyhovuje všem rovnicím naráz.

- *Různoběžné.*

Parametricky: Směrový vektor jedné přímky není násobkem směrového vektoru druhé přímky a přímky mají průsečík.

Rovnicově: Aspoň jednu normálu nemohu vyjádřit jako součet násobků normál rovnic druhé přímky. Dále, aspoň jeden bod vyhovuje všem rovnicím naráz.

- *Mimoběžné.*

Parametricky: Směrový vektor jedné přímky není násobkem směrového vektoru druhé přímky a přímky nemají průsečík.

Rovnicově: Aspoň jednu normálu nemohu vyjádřit jako součet násobků normál rovnic druhé přímky. Dále, žádný bod nevyhovuje všem rovnicím naráz.

**Cv. 1.7** Určete vzájemnou polohu dvou přímek zadaných bodem a směrovým vektorem

$$p : [1, 5, 3], (1, -2, -2), \quad q : [3, 1, -1], (-1, 2, 2).$$

**Řešení:**

Protože jsou směrové vektory až na násobek stejné, jsou přímky rovnoběžné nebo totožné. Snadno ověříme, že bod  $[1, 5, 3]$  přímky  $p$  leží na přímce  $q$ , neboť  $[1, 5, 3] = [3, 1, -1] + t(-1, 2, 2)$  pro  $t = 2$ . Tudíž jsou přímky *totožné*.

**Cv. 1.8** Najděte kvadratickou funkci procházející body  $[1, 1]$ ,  $[2, 2]$ ,  $[3, 7]$ .

**Řešení:**

Kvadratická funkce má tvar  $y = ax^2 + bx + c$ . Dosazením třech bodů dostáváme soustavu tří rovnic o třech neznámých

$$a + b + c = 1, \quad 4a + 2b + c = 2, \quad 9a + 3b + c = 7.$$

Odečtením první rovnice od zbylých dvou a vydělením poslední rovnice 2 dostaneme upravenou soustavu

$$\begin{array}{rrcr} a & + & b & + & c & = & 1, \\ 3a & + & b & & & = & 1, \\ 4a & + & b & & & = & 3. \end{array}$$

Odečtením druhé rovnice od třetí pak dostaneme řešení  $a = 2$ , dosazením do druhé a první rovnice pak  $b = 1 - 3 \cdot 2 = -5$  a  $c = 1 - 2 - (-5) = 4$ . Výsledná funkce tudíž je

$$y = 2x^2 - 5x + 4.$$