

Lineární zobrazení a jejich matice

Definice lineárního zobrazení

Cv. 11.1 Rozhodněte, zda následující zobrazení $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ jsou lineární:

- (a) $f(x, y) = (x, y + 3)^T$,
- (b) $f(x, y) = (x + 2y, y)^T$,
- (c) $f(x, y) = (0, 0)^T$,
- (d) $f(x, y) = (x^2, y)^T$.

Řešení:

- (a) Zobrazení $f(x, y) = (x, y + 3)^T$ není lineární, protože nulový vektor nezobrazuje na nulový vektor.
- (b) Zobrazení $f(x, y) = (x + 2y, y)^T$ je lineární. Ověříme obě podmínky z definice.

Součet. Uvažujme dva vektory (x, y) a (x', y') . Jejich součet se zobrazí na vektor

$$\begin{aligned} f((x, y) + (x', y')) &= f(x + x', y + y') = ((x + x') + 2(y + y'), (y + y'))^T = \\ &= (x + 2y, y)^T + (x' + 2y', y')^T = f(x, y) + f(x', y'). \end{aligned}$$

Násobek. Uvažujme vektor (x, y) a skalár α . Pak vektor $\alpha(x, y) = (\alpha x, \alpha y)$ se zobrazí na vektor

$$f(\alpha x, \alpha y) = (\alpha x + 2(\alpha y), \alpha y)^T = \alpha(x + 2y, y)^T = \alpha f(x, y).$$

- (c) Zobrazení $f(x, y) = (0, 0)^T$ je lineární. Vlastnosti z definice lineárního zobrazení se snadno ověří.
- (d) Zobrazení $f(x, y) = (x^2, y)^T$ není lineární. Například pro vektor $(x, y) = (1, 0)$ a skalár $\alpha = 2$ dostáváme

$$f(\alpha(x, y)) = f(\alpha x, \alpha y) = f(2, 0) = (4, 0)^T,$$

ale

$$\alpha f(x, y) = 2f(1, 0) = 2(1, 0)^T = (2, 0)^T.$$

Čili obecně $f(\alpha(x, y)) \neq \alpha f(x, y)$.

Cv. 11.2 Rozhodněte, zda následující zobrazení z prostoru $\mathbb{R}^{n \times n}$ jsou lineární:

- (a) $f(A) = A^T$,
- (b) $f(A) = I_n$,
- (c) $f(A) = A^2$,
- (d) $f(A) = a_{11}$,
- (e) $f(A) = \text{RREF}(A)$,

Řešení:

- (a) Zobrazení $f(A) = A^T$ je lineární, což plyne z vlastností maticové transpozice:

$$(A + B)^T = A^T + B^T, \quad (\alpha A)^T = \alpha A^T.$$

- (b) Zobrazení $f(A) = I_n$ není lineární, protože nezobrazuje nulovou matici na nulovou.

- (c) Zobrazení $f(A) = A^2$ není lineární. Například pro $A = I_n$ a $\alpha = 3$ máme

$$f(\alpha A) = 9I_n \neq 3I_n = \alpha f(A).$$

- (d) Zobrazení $f(A) = a_{11}$ je lineární. Podmínky z definice se snadno ověří.

- (e) Zobrazení $f(A) = \text{RREF}(A)$ není lineární. Například pro $A = B = I_n$ máme

$$f(A + B) = I_n \neq I_n + I_n = f(A) + f(B).$$

Matice lineárního zobrazení vzhledem ke kanonické bázi

Cv. 11.3 Pro lineární zobrazení $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dané předpisem $f(x, y) = (x + y, x - y)^T$ vypočítejte matici lineárního zobrazení vůči kanonické bázi.

Řešení:

Navrhujeme dva způsoby výpočtu matice zobrazení:

- (a) Vyjdeme z definice, že lineární zobrazení je popsáno obrazem báze. V našem případě potřebujeme vypočítat obraz kanonické báze, čili

$$\begin{aligned} f(e_1) &= f(1, 0) = (1, 1)^T, \\ f(e_2) &= f(0, 1) = (1, -1)^T. \end{aligned}$$

Tyto vektory tvoří sloupce hledané matice

$${}_{\text{kan}}[f]_{\text{kan}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

- (b) Vyjdeme z předpisu $f(x, y) = (x + y, x - y)^T$, který chceme vyjádřit jako $f(x, y) = A(x, y)^T$ pro určitou matici $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. Tedy

$$\begin{pmatrix} x + y \\ x - y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x + a_{12}y \\ a_{21}x + a_{22}y \end{pmatrix}.$$

Není těžké nahlédnout porovnáním koeficientů u x, y , že rovnost splňuje matice

$${}_{\text{kan}}[f]_{\text{kan}} = A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Cv. 11.4 Najděte obraz vektoru $v = (-1, 1, 2)^T$ při lineárním zobrazení $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definovaném:

$$f(1, 0, 0) = (1, 1)^T, \quad f(0, 1, 0) = (-1, 2)^T, \quad f(0, 0, 1) = (0, 0)^T.$$

Řešení:

Předvedeme dva možné způsoby, jak postupovat.

- (a) První způsob využívá matici zobrazení. Sestavíme proto nejprve matici zobrazení vzhledem ke kanonické bázi. Protože máme zadány obrazy kanonické bázi, stačí tyto obrazy poskládat do sloupců matice. Tedy

$${}_{\text{kan}}[f]_{\text{kan}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Hledaný obraz pak dostaneme vynásobením s maticí zobrazení:

$$f(v) = {}_{\text{kan}}[f]_{\text{kan}} \cdot [v]_{\text{kan}} = {}_{\text{kan}}[f]_{\text{kan}} \cdot v = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- (b) Druhý způsob vychází přímo z definice lineárního zobrazení. Protože

$$v = (-1, 1, 2)^T = -1 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2 + 2 \cdot e_3,$$

platí

$$\begin{aligned} f(v) &= f(-1 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2 + 2 \cdot e_3) = -1 \cdot f(e_1) + 1 \cdot f(e_2) + 2 \cdot f(e_3) = \\ &= -1(1, 1)^T + 1(-1, 2)^T + 2(0, 0)^T = (-2, 1)^T. \end{aligned}$$

Cv. 11.5 Najděte matici následujících lineárních zobrazení v rovině $\mathbb{R}^2$ vzhledem ke kanonické bázi:

- (a) Otočení o 90° proti směru hodinových ručiček.
- (b) Projekce na osu x .
- (c) Otočení o 90° proti směru hodinových ručiček a pak projekce na osu x .
- (d) Projekce na osu x a pak otočení o 90° proti směru hodinových ručiček.

Řešení:

Stačí zobrazit jednotkové vektory $e_1 = (1, 0)^T$, $e_2 = (0, 1)^T$ a jejich obrazy tvoří sloupce hledané matice.

- (a) Vektor $(1, 0)^T$ se otočí na $(0, 1)^T$ a vektor $(0, 1)^T$ se otočí na $(-1, 0)^T$. Matice zobrazení tedy je

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- (b) Vektor $(1, 0)^T$ se projektuje na $(1, 0)^T$ a vektor $(0, 1)^T$ se projektuje na $(0, 0)^T$. Matice zobrazení tedy je

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- (c) Vektor $(1, 0)^T$ se otočí na $(0, 1)^T$, který se pak projektuje na $(0, 0)^T$. Vektor $(0, 1)^T$ se otočí na $(-1, 0)^T$ a následně projektuje na $(-1, 0)^T$. Matice zobrazení tedy je

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Alternativně dostaneme matici zobrazení složením předchozích dvou zobrazení. Matice je pak rovna součinu příslušných dvou matic, tedy

$$C = BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- (d) Vektor $(1, 0)^T$ se projektuje na $(1, 0)^T$, který se pak otočí na $(0, 1)^T$. Vektor $(0, 1)^T$ se projektuje na $(0, 0)^T$ a následně otočí na $(0, 0)^T$. Matice zobrazení tedy je

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Alternativně dostaneme matici zobrazení složením předchozích dvou zobrazení. Matice je pak rovna součinu příslušných dvou matic, tedy

$$D = AB = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tento příklad opět ilustruje, že skládání zobrazení není komutativní operace, stejně jako a součin matic.