

Soustavy lineárních rovnic a Gaussova eliminace

Cv. 2.1 Zapište rozšířenou matici soustavy

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 &= 6, \\ -3x_1 + x_2 &= 2,\end{aligned}$$

a vyřešte soustavu Gaussovou nebo Gaussovou–Jordanovou eliminací.

Znázorněte řešení soustavy graficky jako průsečík přímek (tzv. řádkový pohled). Dále vyjádřete pravou stranu soustavy jako kombinaci sloupců matice soustavy (tzv. sloupkový pohled).

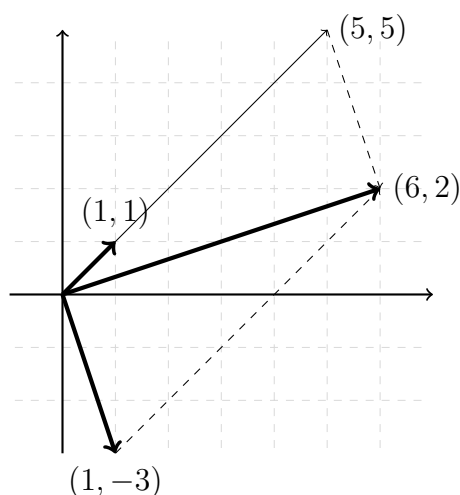
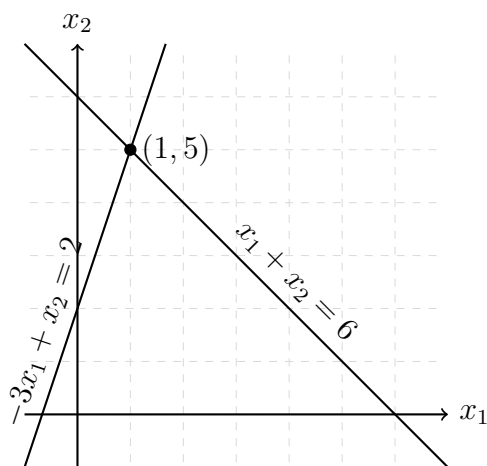
Řešení:

Rozšířená matice soustavy je

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 6 \\ -3 & 1 & 2 \end{array} \right).$$

Aplikací elementárních řádkových úprav snadno nalezneme řešení $(x_1, x_2) = (1, 5)$:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 6 \\ -3 & 1 & 2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 6 \\ 0 & 4 & 20 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 5 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{array} \right).$$



Rovnice $x_1 + x_2 = 6$ a $-3x_1 + x_2 = 2$ popisují dvě přímky v rovině, řešení soustavy $(1, 5)$ je jejich průsečíkem.

Sloupce rozšířené matice soustavy můžeme zakreslit jako vektory v rovině. Řešení soustavy pak říká, že vektor pravých stran $(6, 2)$ dostaneme sečtením (1-krát prodlouženého) vektoru $(1, -3)$ a 5-krát prodlouženého vektoru $(1, 1)$.

Cv. 2.2 Vyřešte Gaussovou nebo Gaussovou–Jordanovou eliminací následující soustavy rovnic a určete hodnotu matic. Na závěr udělejte zkoušku řešení.

$$(a) \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 3 \end{array} \right), \quad (b) \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -3 & 6 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 3 & -1 \end{array} \right), \quad (c) \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 7 \end{array} \right).$$

Řešení:

- (a) Aplikací elementárních řádkových úprav převedeme rozšířenou matici soustavy do odstupňovaného tvaru:

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 3 \end{array} \right) &\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 3 \\ 2 & -3 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & 5 & -10 & -10 \end{array} \right) \sim \\ &\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -20 & -30 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Zpětnou substitucí získáme jediné řešení soustavy $(x_1, x_2, x_3) = (-\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2})$. Alternativně můžeme také použít Gaussovu–Jordanovu eliminaci a převést matici do redukovaného odstupňovaného tvaru

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} \end{array} \right).$$

Hodnota matice je daná počtem nenulových řádků (počtem pivotů) odstupňovaného tvaru. V tomto případě platí $\text{rank}(A) = \text{rank}(A | b) = 3$.

Dosazením ověříme, že vektor $(x_1, x_2, x_3) = (-\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2})$ opravdu vyhovuje soustavě (ale už neověříme, zda potenciálně neexistuje nějaké další řešení).

- (b) Opět upravíme matici pomocí elementárních řádkových úprav:

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -3 & 6 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 3 & -1 \end{array} \right) &\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 5 & -3 & 6 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & -1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 7 & 1 & -13 \\ 0 & 7 & 1 & -7 \end{array} \right) \sim \\ &\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 7 & 1 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{array} \right), \text{ případně v RREF: } \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{9}{7} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{7} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Poslední řádek upravené matice reprezentuje rovnici $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 6$, soustava tedy nemá řešení.

Vidíme, že se v posledním sloupci upravené matice nachází pivot a hodnota rozšířené matice soustavy je $\text{rank}(A | b) = 3$, zatímco $\text{rank}(A) = 2$.

- (c) Aplikací elementárních úprav převedeme matici na tvar:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 7 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Nyní použijeme zpětnou substituci. Z druhého řádku vyjádříme $x_2 = 3 - 2x_3$, přičemž volnou proměnnou x_3 ponecháme jako parametr. Nakonec z prvního řádku dostaneme $x_1 = 1 + x_3$. Soustava má tedy nekonečně mnoho řešení ve tvaru

$$(x_1, x_2, x_3) = (1 + x_3, 3 - 2x_3, x_3) = (1, 3, 0) + x_3 \cdot (1, -2, 1).$$

Geometricky množina řešení tvoří přímku, která prochází bodem $(1, 3, 0)$ a má směrnici $(1, -2, 1)$.

V tomto případě opět platí $\text{rank}(A) = \text{rank}(A \mid b) = 2$, ale zároveň je $\text{rank}(A)$ menší než počet proměnných.

Dosazením například pro $x_3 = 0$ a $x_3 = 1$ ověříme, že vektory $(1, 3, 0)$ a $(2, 1, 1)$ vyhovují soustavě, a tím pádem jí vyhovují všechny na přímce (opět tím ale neověříme, zda neexistuje nějaké ještě jiné řešení).

Cv. 2.3 Kolik existuje různých odstupňovaných tvarů pro matice 3×4 (bez ohledu na konkrétní hodnoty prvků)? A kolik pro matice $n \times n$?

Řešení:

Různé odstupňované tvary se odlišují počtem a pozicí pivotů. Matice 3×4 v odstupňovaném tvaru může mít 0 až 3 pivoty (v každém řádku a sloupci nanejvýš 1). Pro matici hodnoty r se pivoty vždy nachází postupně v prvních r řádcích odstupňovaného tvaru, stačí proto uvažovat umístění pivotů do různých sloupců. Pro matici 3×4 můžeme najít následujících 15 různých odstupňovaných tvarů:

- jeden odstupňovaný tvar s 0 pivoty (nulová matice):

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

- 4 odstupňované tvary s 1 pivotem:

$$\begin{pmatrix} \bullet & - & - & - \\ 0 & - & - & - \\ 0 & 0 & - & - \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \bullet & - & - \\ 0 & 0 & - & - \\ 0 & 0 & 0 & - \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & \bullet & - \\ 0 & 0 & 0 & - \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & - \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

- 6 odstupňovaných tvarů se 2 pivoty:

$$\begin{pmatrix} \bullet & - & - & - \\ 0 & \bullet & - & - \\ 0 & 0 & - & - \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bullet & - & - & - \\ 0 & 0 & \bullet & - \\ 0 & 0 & 0 & - \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bullet & - & - & - \\ 0 & 0 & 0 & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \bullet & - & - \\ 0 & 0 & \bullet & - \\ 0 & 0 & 0 & - \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \bullet & - & - \\ 0 & 0 & 0 & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & \bullet & - \\ 0 & 0 & 0 & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

- 4 odstupňované tvary se 3 pivoty:

$$\begin{pmatrix} \bullet & - & - & - \\ 0 & \bullet & - & - \\ 0 & 0 & \bullet & - \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bullet & - & - & - \\ 0 & \bullet & - & - \\ 0 & 0 & 0 & \bullet \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bullet & - & - & - \\ 0 & 0 & \bullet & - \\ 0 & 0 & 0 & \bullet \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \bullet & - & - \\ 0 & 0 & \bullet & - \\ 0 & 0 & 0 & \bullet \end{pmatrix}.$$

Obecně, matice $n \times n$ může mít 0 až n pivotů, v každém z n sloupců se pivot buď nachází (v prvním řádku, který je dosud bez pivota), nebo nenachází, dostaneme tedy 2^n možných různých odstupňovaných tvarů. Alternativně, pro $k \in \{0, \dots, n\}$ pivotů máme $\binom{n}{k}$ možných rozmístění do n sloupců, tj. celkem $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$ odstupňovaných tvarů.